*

Aksiomatiseringer av noen treverdige setningslogikker relatert til Halldéns "Logic of Nonsense" og Segerbergs H_0

*

Morten Rognes

1988

*

§ 0 Innledning.

I det følgende skal vi løse aksiomatiseringsproblemet for et bestemt subsystem av en treverdig setningslogikk, H;0, som har blitt undersøkt i Segerberg [1], [2]. Vi vil også aksiomatisere to andre logikker som er utvidelser av dette subsystem. Dette vil bli gjort i §1 – §7.

Men før vi går over til de rent tekniske detaljer i forbindelse med våre kalkyler vil vi i denne innledningen forsøke å klargjøre endel grunnleggende begreper på en mindre formell måte.

Det er vanlig å si at deklarative setninger er språkelige uttrykk som enten er sanne eller usanne. Dette er trivielt sant om man definerer uttrykket "deklarativ setning" ved å si at det er et språklig uttrykk som enten er sant eller usant. Men uansett om påstanden oppfattes som sann i kraft av en definisjon eller ikke kan man heve at det finnes setningslignende uttrykk som syntaktisk sett ligner svært på språkelige uttrykk som er enten sanne eller usanne, men der man intuitivt sett vil nøle noe med å karakterisere dem som enten det ene eller det andre. Vi har i tankene visse setninger som inneholder singulære termer uten referanse, f. eks. "Den nuværende konge av Frankrike er skallet", "Pegasus har vinger.". Men også andre setninger av mer metafysisk art kan muligens også nevnes, f.eks. "Gud eksisterer", "Verden har en begynnelse i tid.". Det synes derfor som om setninger kan inndeles i snarere tre klasser enn bare to, nemlig i sanne, usanne og setninger som hverken er sanne eller usanne, mao. som har ubestemthet som sin sannhetsverdi. I stedet for – som i den klassiske logikk – å arbeide med bare to sannhetsverdier kunne man altså ta i betraktning tre mulige sannhetsverdier: sannhet, usannhet og ubestemthet. I det følgende vil vi gjøre nettopp dette.

La oss nå tenke oss at vi har for oss en fiksert, gjerne uendelig, mengde med setninger Δ;0 som inneholder en del sanne, en del usanne og en del setninger som hverken er sanne eller usanne, mao. ubestemte setninger. Vi forestiller oss at disse setningene er usammensatte i den betydning at de ikke er bygd opp fra kortere setninger ved hjelp av de vanlige setningslogiske konnektivene. Dernest ser vi på den mer omfattende setningsmengden vi får når Δ;0 utvides med alle de setninger som er bygd opp fra dem i Δ;0 ved hjelp av de vanlige setningslogiske konnektivene etter de vanlige regler. La oss kalle denne nye setningsmengden for Δ;1.

Hvordan vil sannhetsverdien til en sammensatt setning i Δ;1 avhenge av sannhetsverdiene til de usammensatte setningene i Δ;0 om vi antar, som vi nå gjør, at vi har tre sannhetsverdier?

Det mest nærliggende er kanskje å tenke seg at *om en setning i Δ;1 inneholder en hovedkomponentsetning som har ubestemthet som sin sannhetsverdi så er hele setningen ubestemt.* F. eks. vil da en setning av typen "Det er ikke slik at Pegasus har vinger." mangle sannhet og falskhet i like stor utstrekning som setningen "Pegasus har vinger.". *Har vi derimot for oss en setning av sammensatt natur hvor hovedkomponentsetningene enten er sanne eller usanne vil setningen selv være sann eller usann og sannhetsverdien være fastsatt etter de klassiske regler for de setningslogiske konnektivene.* Etter disse reglene vil f. eks. en setning av typen A–> B måtte regnes som sann om A er en usann setning og B er en setning som enten er sann eller usann. I det følgende vil disse reglene som vi nå har angitt bli tatt for gitt.

La oss nå innføre et nytt konnektiv, nemlig (1) "Det er sant at ——", som gir som resultat en setning om vi setter inn en setning for "——". Hvordan vil sannhetsverdien til en slik setning avhenge av sannhetsverdien til komponentsetningen "——"? Det virker naturlig og berettiget å si følgende: Setter man inn en sann setning for uttrykket "——" i (1) blir det

resulterende uttrykk en sann setning. Setter man derimot inn for "——" en usann eller ubestemt setning blir resultatet en usann setning. Hvis man derfor tar det for gitt at setningen "Gud eksisterer" er ubestemt, dvs. hverken sann eller usann, så vil altså setningen "Det er sant at Gud eksisterer." måtte regnes som usann etter denne regel. Det samme gjelder setningen "Det er sant at Gud ikke eksisterer.". denne vil også være usann. For er "Gud eksisterer" ubestemt vil også – etter reglene ovenfor – setningen "Gud eksisterer ikke" være ubestemt. Men da vil setningen "Det er sant at Gud ikke eksisterer" være usann ifølge den regel som nettopp ble gitt for konnektivet (1).

Det kan være beleilig å betegne med Δ;2 den mengden av setninger som man får når Δ;0 utvides med alle de setninger som er bygd opp fra dem i Δ;0 ved hjelp av de vanlige setningslogiske konnektivene pluss konnektivet (1), som vi heretter vil forkorte med "μ(——)". I mengden Δ;2 vil noen av setningene være sanne, noen vil være usanne og atter andre ubestemte. Er det nå mulig å definere logisk sannhet for setningene i Δ;2 på noen naturlig måte?

Det virker ikke helt berettiget å gi noe altfor kategorisk svar siden flere muligheter synes å være åpne. Vi skal se på flere forskjellige forslag etterhvert.

Et første forslag består i at man ganske enkelt adopterer den vanlige substitusjonelle definisjon av setningslogisk sannhet og stipulerer at en setning *A er en logisk sannhet i Δ;2 hvis og bare hvis A er en sann setning i Δ;2 og alle andre setninger i Δ;2 med samme setningslogiske form som A er sanne*. At to setninger A;1 og A;2 i Δ;2 har samme setningslgiske form innebærer da at A;1 kan fås fra A;2 ved å erstatte en eller flere usammensatte setninger i A;2 overalt hvor de forekommer med andre setninger hentet fra Δ;2. Legger vi denne definisjonen av logisk sannhet til grunn vil ingen setning av typen p–>p, for å ta et meget enkelt eksempel, være noen logisk sannhet. For setter vi her inn en ubestemt setning for p får vi som resultat en setning med den samme setningslogiske form, men den vil være ubestemt og derfor ikke sann. Derimot vil μ(p)–>μ(p) være en logisk sannhet. For det første er denne setningen sann. For det andre vedblir den å være sann uansett hvilken setning man setter inn for p. Setter man inn en setning som hverken er sann eller usann for p blir antesedenten, såvel som konsekventen, usann og derfor det hele sant. Det samme gjelder om man for p setter inn en usann setning. Setter man tilslutt inn en sann setning for p antesedenten og konsekventen begge bli sanne. Etter de regler vi har gitt ovenfor vil da hele setningen bli sann.

La oss se på et annet forslag. Man kunne foreslå å endre definiens i definisjonen ovenfor ved å ersatte uttrykket "sann setning" med " setning som ikke er usann". Mao. kunne man forslå å si per definisjon at *A er en logisk sannhet i Δ;2 hvis og bare hvis A er en setning i Δ;2 som ikke er usann og det dessuten er slik at enhver setning i Δ;2 med samme setningslogiske form som A heller ikke er usann.*

For at en setning skal være en logisk sannhet i denne forstand er det altså ikke nødvendig at den er sann. En ubestemt setning kan også være en logisk sannhet i denne forstand. Ser man f.eks. på en setning av formen p–>p der p er ubestemt vil dette være en logisk sannhet om vi bruker den definisjonen vi nå har formulert, men altså ikke være det om vi bruker den første definisjonen. Grunnen er at man aldri kan få en usann setning uansett hva slags setning man setter inn for p. Setter man inn en usann setning blir resultatet sant fordi en kondisjonalsetning med usann antesedent alltid er sann. Setter man inn for p en ubestemt setning blir resultatet en setning med sannhetsverdien ubestemthet. Og tenker man seg endelig at en sann setning innsettes blir resultatet en sannhet. Ikke i noe tilfelle får vi frem en usann setning.

Fra de definisjonene som nå er gitt ser man forøvrig nokså lett at alle de setninger som er logiske sannheter i den førstnevnte betydningen også er logiske sannheter i den sistnevnte

betydning. men det omvendte holder ikke, noe som eksemplet p–>p viser. Vi bemerker dessuten at hvis setningsvariablene i Segerbergs kalkyle H;0 (Se Segerberg [2]) representerer de enkelte setninger i Δ;0 så representerer de gyldige formlene i denne kalkyle nøyaktig de setninger i Δ;2 som er logiske sannheter i den siste betydning. Dette fremgår nokså direkte fra de matriserer som brukes til å definere systemet H;0.

I det foreliggende arbeid vil vi beskjeftige oss med de logiske sannhetene i den førstnevnte betydning og, som antydet innledningsvis, vil vi angi en aksiomatisering av denne setningsmengden. I §1 og §2 fremstiller vi mer nøyaktig det syntaktiske og semantiske apparat vi arbeider med og beskriver syntaksen og semantikken til det setningslogiske språket L;μ. I §3 beviser vi en del nødvendige setninger om gyldighet. I §4 formulerer vi så vår akiomatisering av det vi kaller de μ-gyldige formlene i L;μ, dvs. de logiske sannhetene i L;μ i den førstnevnte betydning. Vi gir så, i §5, et fullstendighetsbevis for den aksiomatiske kalkyle vi presenterer.

§ 0.1

Er den noen motsigelse mellom den teori vi har fremlagt ovenfor og den klassiske setningslogikk? Dette spørsmål synes å fortjene en nærmere drøftelse. Såvidt vi kan se er der ingen slik motsigelse. Men det kommer muligens an på hva man mener med "den klassiske setningslogikk". Hvis man med uttrykket "den klassiske setningslogikk" sikter til en bestemt formal kalkyle hvor formlene i kalkylen er bygd opp fra en tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver p;1, p;2, p;3,.... ved hjelp av tegnene "–>", "v", "&", "¬", "<–>", "(", ")" etter de vanlige regler og hvor man i tilknytning til disse ar avgrenset et sett av aksiomer og slutningsregler, f. eks. de vi senere skal beskrive, kan det neppe være noen motsigelse tilstede. En slik kalkyle er i seg selv en helt uintepretert formalisme og kan som sådan ikke motsi noe. Hvis man på den annen side med uttrykket "den klassiske setningslogikk" sikter til de setningslogiske sannhetene i en viss setningsmengde ∏ som er bygd opp fra visse usammensatte setninger ved hjelp av de vanlige setningslogiske konnektivene og der alle de usammensatte setningene enten er sanne eller usanne og hvor sannhetsverdiene til de sammensatte setningene distribueres etter de vanlige regler og hvor endelig setningslogisk sannhet i ∏ defineres på vanlig måte, vil det heller ikke, såvidt vi kan se, være noen motsigelse til stede.

For la oss kalle de usammensatte setningene i ∏ for ∏;0. La oss videre tenke oss at vi utvider disse seningene i ∏;0 med noen som hverken er sanne eller usanne og som også er usammensatte slik at vi får en mer omfattende setningsmengde, la oss si Δ;0 som vi tenkte oss ovenfor. Anta vi så med utgangspunkt i Δ;0 betrakter Δ;2 som er mengden av alle de setninger som er bygget opp fra dem i Δ;0 ved hjelp av μ og de setningslogiske konnektivene. Man ser da at ∏ Inkl Δ;2. Ovenfor avgrenset vi en viss delmengde av setninger i Δ;2, la oss nå kalle denne mengden X, ved å si at en setning i Δ;2 var et element i denne mengden hvis og bare hvis setningen var sann og alle andre setninger i Δ;2 med samme setningslogiske form (dette ble forklart nærmere ovenfor) var sanne. Vi tillot oss å kalle elementene i X for de logiske sannhetene i Δ;2. Men dette var et rent forslag til regelgivende definisjon. Vi kunne ha innført en helt annen og nøytral terminologi og kalt elementene i X for X-sannhetene i Δ;2. Hvis vi holder oss til denne sistnevnte terminologi og fastholder den synes det ikke å være noen motsigelse noe sted. Vi har bare avgrenset to (faktisk disjunkte) setningsmengder, nemlig (a) de setningslogiske sannhetene i ∏ og (b) klassen av elementer i X. Men ved å avgrense X har vi ikke dermed sagt at noen av de setningslogiske sannhetene i ∏ ikke er sannheter, heller ikke at noen av disse ikke fortjener å bli kalt for logiske sannheter, heller ikke har vi betvilt riktigheten av noen av de regler for hvordan

sannhetsverdier skal fordeles til de sammensatte setningene i ∏ på grunnlag av de usammensatte, snarere har vi beholdt disse reglene ved avgrensningen av delmengden X av Δ;2 og de er forutsatt ved definisjonen av X.

§ 0.2

Vi betraktet i § 0 to forslag til definisjon av uttrykket "logisk sannhet i Δ;2". Vi vil nå avgrense to andre setningsmengder i Δ;2 som også kan komme i betraktning om man vil ta stilling til spørsmålet om logisk sannhet i Δ;2.

Først vil vi avgrense klassen y Inkl Δ;2. Elementene i Y vil bli kalt Y-sannhetene i Δ;2. Ovenfor sa vi at to setninger A, B i Δ;2 hadde samme logiske form om A kunne fås fra B ved uniform substitusjon av setninger for usammensatte setninger. La oss nå innføre et litt annet begrep setningslogisk form.

Anta A,BêΔ;2. La oss da si at A har samme s;1-form som B hvis og bare hvis A har samme setningslogiske form som B og A i tillegg er fått fra B ved alltid å erstatte usammensatte setninger som enten er sanne eller usanne med setninger (hentet fra Δ;2) som er sanne eller usanne.

La oss dernest definere Y ved å si at en setning A i Δ;2 er med i Y hvis og bare hvis A er sann og enhver setning i Δ;2 med samme s;1-form som A er sann.

Det er nå ikke så vanskelig å se på grunnlag av de definisjoner vi har gitt av ∏, de setningslogiske sannhetene i ∏ og av mengden X at såvel de setningslogiske sannhetene i ∏ som setningene i X er inkludert i Y. Dette innebærer at Y er en mer omfattende setningsmengde. La oss også bemerke at X er strengt inkludert i Y.

For anta p;1 er en *sann* usammensatt setning i Δ;2. Da vil p;1–>p;1 ikke være med i X for er p;2 en usammensatt setning med ubestemthet som sin sannhetsverdi vil p;2–>p;2 ha samme setningslogiske form som p;1–>p;1, men p;2–>p;2 vil være ubestemt og derfor er p;1–>p;1 ingen X-sannhet. Derimot vil p;1–>p;1 være en Y-sannhet. For enhver setning med samme s;1-form som
p;1–>p;1 vil være en der man har ersattet p;1 med en annen setning som enten er sann eller usann. Og uansett hva man da setter inn får man en sann setning som resultat.

Vi vi så avgrense en mengde Z der Z inkl Δ;2. Elementene i Z vil vi her kalle Z-sannhetene i Δ;2. Først nevnes det at vi per definisjon sier at hvis A;BêΔ;2 så har A samme s;2-form som B hvis og bare hvis A har samme s;1-form som B og A i tillegg er fått fra B ved å erstatte usammensatte setninger som er ubestemte med setninger hentet fra Δ;2 som også er ubestemte.

En formel A i Δ;2 kalles så en Z-sannhet i Δ;2 hvis og bare hvis A er sann og alle andre setninger i Δ;2 med samme s;2-form også er sanne.

Siden det alltid er slik at hvis A har samme s;2-form som B så er det slik at A har samme s;1-form som B følger det at alle Y-sannhetene i Δ;2 er blandt Z-sannhetene i Δ;2. Imidlertid vil det være visse formler i Δ;2 som er Z-sannheter, men ikke Y-sannheter. La oss gi et eksempel på dette. La p;1 være en usammensatt setning i Δ;2 med ubestemthet som sannhetsverdi. La A være formelen: "¬μ(p;1) & ¬μ(¬p;1)". Da ser man lett at A er sann ifølge reglene om distibusjon av sannhetsverdier til komplekse formler i Δ,2. Nå ser man fra definisjonen av s;2-form at enhver setning i Δ;2 med samme s;2-form som den nevnte setning må være av typen ¬μ(B)&¬μ(¬B) der B er en setning med ubestemthet som sannhetsverdi. Men enhver slik setning er åpenbart sann. Det følger at A er en Z-sannhet. Derimot vil ikke A være noen Y-sannhet. For er p;2 en usann usammensatt setning vil D=(¬μ(p;2)&¬μ(¬p;2)) ha samme s;1-form som A. Men i dette tilfellet vil D være usann.

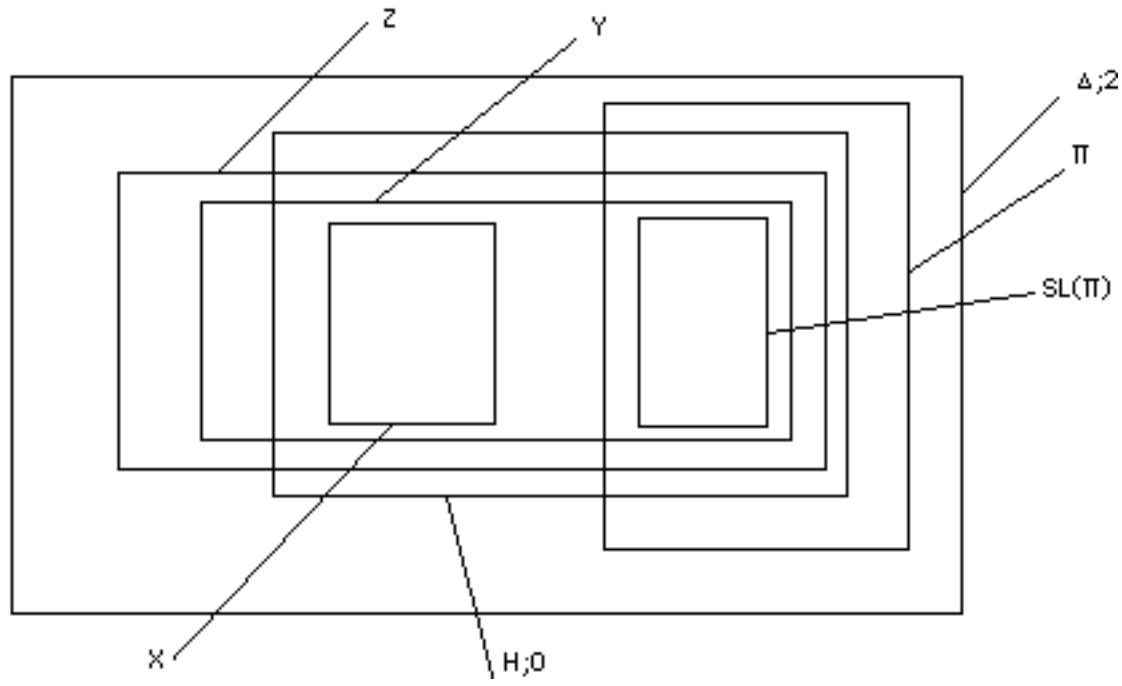
Det følger at ikke alle Δ;2-setninger med samme s;1-form som A er sanne. Dette innebærer at A ikke er noen Y-sannhet.

Forholdet mellom de ulike setningsklassene som vi så langt har avgrenset kan anskueliggjøres ved figuren som befinner seg øverst på neste side.

Det bør bemerkes at SL(∏) betegner de setningslogiske sannhetene i ∏. Videre bemerker vi at H;0-sannhetene i Δ;2 er de setninger som er logiske sannheter i følge den andre definisjonen som ble nevnt i §0. Man ser fra figuren at XΩSL(∏)=ø og at X SInkl Y SInkl Z. Det bør også bemerkes at X og SL(∏) er strengt inkludert i H;0. Derimot er mengdene Y og Z usammenlignbare med H;0. Er p en sann usammensatt setning i Δ;2 er det klart at alle setninger med samme s;1-form som μ(p–>p) er sanne. Mao. er dette en Y-sannhet og derfor også en Z-sannhet. Hvis man derimot erstatter p en en ubestemt setning får man en setning med den samme setningslogiske form, men den vil da være usann. μ(p—>p) kan derfor ikke være noen H;0-sannhet.

La oss også gjøre oppmerksom på at figuren antyder riktigheten av den følgende sats som faktisk kan bevises, nemlig at YΩ∏=SL(∏). Tilsvarende satser

FIGUR 1



gjelder for Z og H;0. Dette innebærer at man har ZΩ∏=SL(∏) og dessuten at H;0Ω∏ = SL(∏). Dette viser at systemene Y, Z og H;0 er konservative utvidelser av de setningslogiske sannhetene i ∏.

La oss tilslutt bemerke at om man ønsker å definere logisk sannhet for setningene i Δ;2 synes i våre øyne det mest naturlige å være å identifisere dem med Z-sannhetene. H;0 inkluderer setninger som hverken er sanne eller usanne. Det virker eiendommelig å karakterisere disse setningene som sannheter og derfor som logiske sannheter. X og Y vil, såvidt vi kan se, gi opphav til en for snever avgrensning av de logiske sannhetene. X fordi de vanlige setningslogiske sannhetene ekskluderes, Y fordi det virker naturlig å se på setninger av typen ¬μ(A)&¬μ(¬A), hvor A er ubestemt, som logiske sannheter. Men setninger av denne typen er, som vi pekte på ovenfor, ikke Y-sannheter.

I §6 i dette arbeidet vil vi formulere en aksiomatisering av Y-sannhetene. Dette innebærer at vi vil spesifisere en kalkyle S;μ(Δ) som er slik at hvis visse setningsbokstaver i denne kalkylen, de utvalgte, tenkes å representere de setninger i Δ;0 som er sanne mens de resterende setningsbokstaver representerer de setningene i Δ;0 som er ubestemte, så vil teoremene i S;μ(Δ) representere alle Y-sannhetene i Δ;2. I §6.3 utvider vi dette system til en kalkyle S+;μ(Δ) som på tilsvarende vis representerer Z-sannhetene i Δ;2. I §7 beviser vi så de resultatene som vi nevnte ovenfor, nemlig at Y og Z er konservative utvidelser av SL(∏). Forøvrig vil vi vise at våre aksiomatiseringer av setningsmengdene X,Y og Z er fullstendige.

La oss så gå over en mer teknisk preget fremstillingsmåte og ta for oss alle de detaljer som er nødvendige for å formulere de resultatene vi har nevnt helt presist.

§ 1

Vi skal først gi en syntaktisk beskrivelse av språket L;μ. Tegnene i dette språket er en tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver p;1, p;2, p;3,....., parantestegnene "(", ")", dessuten tegnene "¬","–>" som representerer henholdvis en unær og en binær setningsdannende operator på setninger, samt dden unære setningsdannende operatoren "μ" som kan leses "Det er sant at --". Formlene i språket L;μ er dannet etter de følgende regler:

(i) Enhver setningsbokstav er en formel i L;μ
(ii) Er A og B to formler er også (¬A), μ(A) og (A–>B) formler.
(iii) Ingen andre uttrykk enn dem som er det ifølge (i) og (ii) er formler.

Dette avslutter den syntaktiske beskrivelsen av språket L;μ. Som man ser er språket av en meget enkel type.

Vi betegner klassen av formler i L;μ med "Fm(L;μ)". En formel A kalles for μ-lukket om enhver setningsbokstav i A forekommer som endel av en formel av typen μ(B). Klassen av μ-lukkede formler i L;μ betegner vi med "C;μ". Naturligvis har man da at C;μ Inkl Fm(L;μ).

§ 2

I det følgende betegner "*" et fiksert objekt som er forskjellig fra de to naturlige tallene 0 og 1. Hensikten er at * skal representere sannhetsverdien ubestemthet, mens 1 og 0 skal representere henholdsvis sannhetsverdien sannhet og sannhetsverdien usannhet. Vi betegner klassen av setningsbokstaver i L;μ med Var(L;μ).

Med en modell for L;μ forstår vi en funksjon R der R: Var(L;μ) –>{*,1,0}. Klassen av alle modeller for L;μ betegner vi med "M;μ".

Er R en modell for L;μ og AêFm(L;μ) definerer vi hva som menes med sannhetsverdien til A relativt til modellen R, i symboler "R(A)", ved den følgende induktive definisjon:

(a) Er A=(¬B) der BêFm(L;μ) er R(A)=1 dersom R(B)=0, videre er R(A)=0 dersom R(B)=1, og endelig er R(A)=* om R(B)=*
(b) Er A=(B–>C) for noen formler B,CêFm(L;μ) setter vi at R(A)=1 hvis og bare hvis vi enten har at R(B)=R(C)=1, eller har at R(B)=0 og R(C)=1, eller har at R(B)=R(C)=0. Vi setter at R(A)=0 hvis og bare

hvis R(B)=1 og R(C)=0. Tilslutt settes R(A)=* hvis og bare hvis R(B)=* eller R(C)=*.

(c) Er A=μ(B) der BêFm(L;μ) setter vi R(A)=1 om R(B)=1. Vi setter R(A)=0 om R(B)ê{0,*}

Dette avslutter definisjonen.

Man ser at R(A) nå er definert for enhver formel AêFm(L;μ) og at R(A)ê{0,1,*} for alle AêFm(L;μ).

§ 2.1

Vi kaller en formel AêFm(L;μ) for μ-gyldig, i symboler "Val;μ(A)", hvis og bare hvis vi har at R(A)=1 for enhver RêM;μ. Dette innebærer at en formel A er μ-gyldig hvis og bare hvis R(A)=1 for enhver modell R for L;μ.

Før vi går videre nevner vi at vi innfører uttrykket "(AvB)" som en metalogisk forkortelse for "((¬A)–>B)", videre brukes "(A&B)" som forkortelse for "(¬(A–>(¬B)))" og "(A<–>B)" som forkortelse for "((A–>B)&(B–>A))".

De klausulene som inngår i vår induktive definisjon av R(A) for AêFm(L;μ) kan settes opp på en mer oversiktlig måte i form av en sannhetsverditabell. I denne tabellen representerer A og B vilkårlige formler i L;μ:

Sannhetsverditabell:

A	B	¬A	A&B	A<–>B	AvB	A–>B	μ(A)
1	1	0	1	1	1	1	1
1	*	0	*	*	*	*	1
1	0	0	0	0	1	0	1
*	1	*	*	*	*	*	0
*	*	*	*	*	*	*	0
*	0	*	*	*	*	*	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	*	1	*	*	*	*	0
0	0	1	0	1	0	1	0

Her har vi – som man ser – også satt opp tabellene for de definerte konnektivene &, v og <–>.

§ 2.2

I det følgende skal vi betegne klassen av alle de μ-gyldige formlene i L;μ med S*;μ. Som tidligere nevnt betraktes i Segerberg [1], [2] en setningslogikk H;0 som er nært forbundet med S*;μ. Språket til H;0 er som L;μ, men inneholder i tillegg to monadiske, setningsdannende, konstruksjoner på setninger, nemlig "+" og "–", med de forventede regler for dannelse av velformede formler. For konnek-tivene i dette utvidete språket innføres sannhetsverditabellen som vi ga i § 2.1 med tillegg av den tabellen for konnektivene + og – som er oppført øverst på neste side.

Man ser nokså lett fra denne tabellen at konnektivene + og – kan defineres ved hjelp av μ idet sannhetsverditabellene for μ(A)vμ(¬A) og ¬μ(A)&¬μ(¬A) blir som dem for henholdsvis + og –. Dette viser at vi kan begrense oss til språket L;μ.

Tabell for + og –:

A	+A	–A
1	1	0
*	0	1
0	1	0

Med en H;0-tautologi forstås nå en formel i L;μ som får verdiene 1 eller * for enhver tilordning av sannhetsverdiene 1, 0 og * til setningsbokstavene. Logikken H;0 kan så identifiseres med mengden av alle slike H;0-tautologier.

Den vesentlige forskjell mellom H;0 og S*;μ er at vi arbeider med bare 1 som utpekt verdi. Alle μ-gyldige formler er derfor H;0-tautologier, men ikke omvendt. Systemet S*;μ kan derfor oppfattes som et subsystem av H;0 og aksiomatiseringsproblemet for klassen av μ-gyldige formler kan følgelig oppfattes som et aksiomatiseringsproblem vedrørende et delsystem av H;0.

Det bør nevnes at i Segerberg [1] vises det at H;0 er aksiomatiserbar. Flere forkjellige aksiomatiske systemer for logikken fremsettes. I Segerberg [2] betraktes en rekke modallogikker basert på systemet H;0. En rekke lignende systemer kunne naturlig nok betraktes i forbindelse med S*;μ. Vi skal imidlertid ikke gå inn på dette her siden vi begrenser oss til å betrakte systemet S*;μ og to systemer som er en utvidelse av dette system.

I Halldén [1] betraktes også en logikk som er relatert til de to som så langt er nevnt. Men i dette arbeidet betraktes bare det vanlige setningslogiske språk utvidet med konnektivet +. Konnektivene μ og – betraktes ikke. For de konnektiver som er felles, ie ¬,–>, <—>, &, v og + betraktes de sannhetstabeller som har blitt gitt. Det bemerkes i Segerberg [2] at μ ikke kan defineres ved hjelp av + og – alene sammen med de setningslogiske konnektivene.

Fra definisjonen ovenfor ser man at en H;0-tautologi er en formel AêFm(L;μ) hvor man har R(A)ê{1,*} for enhver RêM;μ.

Det som nå står for tur er å relatere begrepene H;0-tautologi og μ-gyldig formel i L;μ til begrepene X-sannhet og H;0-sannhet som ble introdusert i § 0.1.

§ 2.3

I §0 sa vi ikke noe bestemt om kardinaltallet til Δ;0. Vi vil nå forutsette at de usammensatte setningene i denne mengden er tellbart uendelige og vi vil videre forutsette at ∏;0 er klassen av alle de setninger i Δ;0 som enten er sanne eller usanne. I tillegg vil det det bli forutsatt at ∏;0 er tellbart uendelig og at Δ;0 – ∏;0 er det. Gitt disse forutsetningene vil det finnes en en-entydig avbildning f av Var(L;μ) på Δ;0 og vi tenker oss at vi plukker ut en bestemt slik avbildning f: Var(L;μ) –(1-1,på)–> Δ;0 og holder den fiksert i det følgende. Denne avbildningen f kan på en opplagt måte utvides til en strukturbevarende avbildning F:Fm(L;μ)–(1-1,på)–> Δ;2. Dette skjer ved at man definerer F induktivt slik:

(i) F(p;k) = f(p;k) om p;kêVar(L;μ)
(ii) F(A–>B) = (F(A)–> F(B)) om A,BêFm(L;μ)
(iii) F(¬A) = (¬F(A)) om AêFm(L;μ)
(iv) F(μ(A)) = μ(F(A)) om AêFm(L;μ)

Det er lett å verifisere at denne induktivt definerte F er en-entydig og på Δ;2.

Det vi nå kan vise er at bildet av mengden av alle de μ-gyldige formlene over F, ie. F‘‘Mg(A: AêFm(L;μ) & Val;μ(A)) er klassen av X-sannheter i Δ;2 og at det tilsvarende gjelder for H;0-tautologiene.

Hovedpunktet her er det følgende lemma som bevises ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av A:

Lemma 0 Anta RêM;μ og at AêFm(L;μ). La c;1,....,c;n være de setningsbokstavene som forekommer i A og anta at S;1,....,S;n er setninger i Δ;2. Anta S;i (i=1,...,n) er sann hvis og bare hvis R(c;i)=1 og at S;i er usann hvis og bare hvis R(c;i)=0. Anta tilslutt at S;i er ubestemt hvis og bare hvis R(c;i)=*. La A* betegne resultatet av å sette inn S;1,....,S;n for henholdsvis f(c;1),...,f(c;n) i F(A). Da har man at R(A)= 1 (*,0) hvis og bare hvis A* er sann (ubestemt, usann).

Siden beviset for denne satsen er likefrem utelater vi det av plasshensyn.

Vi minner om at X-sannhetene i Δ;2 betegnes med X. Vi vil nå bevise:

(I) F‘‘Mg(A: AêFm(L;μ) & Val;μ(A)) = X

Bevis: (a) Anta først for vilkårlig B at BêX. Vi må da vise at det finnes en CêFm(L;μ) slik at Val;μ(C) & F(C)=B. Vi har at F er en-entydig og på Δ;2. Vi setter derfor C=F;-1(B). La s;1,...,s;n være de usammensatte setningene som forekommer i B. Da finnes det setningsbokstaver c;1,...,c;n slik at f(c;i)=F(c;i)=s;i for i =1,..,n. Det er klart at vi har CêFm(L;μ). Vi må vise at R(C)=1 for alle RêM;μ. Anta derfor at R er en vilkårlig modell. Plukk ut visse setninger S;1,...S;n i Δ;2 slik at R(c;i)=1(*,0) hvis og bare hvis S;i er sann (ubestemt, usann). La B* være resultatet av å sette inn S;1,...,S;n for s;1,...,s;n i B. Da har B* samme setningslogiske form som B og siden BêX er B* sann. I lys av Lemma 0 har vi da R(C)=1. Dette viser at C er μ-gyldig. Man ser også lett at F(C)=B.

(b) Anta AêFm(L;μ) & Val;μ(A). Vi må da vise at F(A)êX. la c;1,...,c;n være de setningsbokstavene som forekommer i A, Vi må vise at enhver setning med samme setningslogiske form som F(A) er sann. La A* være en vilkårlig setning i Δ;2 med samme setningslogiske form som F(A). Da må det finnes visse setninger S;1,....,S;n som innsatt for henholdsvis f(c;1),...,f(c;n) i F(A) gir oss A*. Definer en modell ved å sette R(c;i) =1 (*,0) alt ettersom S;i er sann (ubestemt, usann). Definer R(q) vilkårlig om q ikke er en setningsbokstav blandt c;1,...,c;n. Siden Val;μ(A) har vi da R(A)=1. Men fra dette, Lemma 0, samt konstruksjonen av R følger at A* er sann. Men A* var en vilkårlig setning med samme setningslogiske form som F(A). Da må F(A)êX. Dette avslutter vårt bevis for (I). **Q.E.D.**

la H;0* betegne klassen av H;0-tautologier i L;μ og la H;0 betegne klassen av H;0-sannheter i Δ;2, Vi kan da i analogi med (I) bevise den følgende sats:

(II) F‘‘H;0* = H;0

Beviset blir imidlertid på nesten alle punkter analogt med det vi har gitt ovenfor. Vi utelater det derfor av denne grunn. En interessert leser kan eventuelt gjennomføre det på egenhånd som øvelse.

La oss betegne (f;-1)‘‘∏;0 med Q. Q vil da være en mengde med setningsbokstaver i L;μ, nemlig dem som representerer de setninger i Δ;0 som enten er sanne eller usanne. Med en Q-modell forstår vi en modell RêM;μ der vi har R(c)={0,1} om cêQ. De Q-gyldige

formlene i L;μ er da nøyaktig dem som er sanne i alle Q-modeller. la oss betegne de Q-gyldige formlene i L;μ med Q;v.

Tilslutt definerer vi en Q+-modell som en modell RêM;μ der vi har R(c)ê{0,1} om cêQ og R(c)=* om cê(Var(L;μ)–Q). De Q+-gyldige formlene i L;μ er da nøyaktig dem som er sanne i alle Q+-modeller. Klassen av disse formler betegnes med Q+;v.

På samme måte som ved (I) og (II) kan man nå ved hjelp av Lemm 0 bevise de følgende satser som relaterer Q;v og Q+;v til henholdsvis klassen av Y-sannheter og Z-sannheter i Δ;2. Vi har:

(III) F‘‘(Q;v) = Y
(IV) F‘‘(Q+;v) = Z.

Dermed har vi vist sammenhengen mellom alle de setningsklasser som vi definerte i § 0 og de modellteoretiske begrepene som vi nå har innført.

Sammenligner man de begrepsdannelsene vi har innført her med de begreper som innføres i §6 ser man forøvrig at det vi her kaller Q-modeller er nøyaktig elementene i M;μ(Q) når M;μ(Δ) defineres generelt som i §6. Videre fremgår det fra § 6.3 at når M+;μ(Δ) defineres slik det gjøres der har man at Q+-modellene er nøyaktig de elementer som inngår i M+;μ(Q).

§3 En del hjelpesetninger.

I § 4 skal vi presentere vår aksiomatisering av S*;μ. I denne paragrafen skal vi bevise endel hjelpesetninger om blandt annet μ-gyldighet som er nyttige når vi skal vise at vårt aksiomatiske system bare har μ-gyldige formler som teoremer. Vi starter med det følgende Lemma:

Lemma 1 Anta A er en vilkårlig formel i L;μ. Da har vi at det følgende er tilfelle: Enter er A=p;k for noe kêN eller så er A=μ(B) for en eller annen formel BêFm(L;μ) eller så finnes det formler C;1,....,C;n og setningsbokstaver c;1,...,c;m, der m, eventuelt n, kan være null, men der ikke begge kan være null, slik at A er bygd opp fra formlene μ(C;1),...,μ(C;n), c;1,....,c;m utelukkende ved hjelp av ¬
og –>.

Bevis: Setningen bevises ved induksjon på lengden av A. Er A en setningsbokstav eller en formel av typen μ(B) er det åpenbart at den holder. Er A=(¬D) har vi i lys av induksjonshypotesen at en av tre ting er tilfelle:
(a) D=p;k for noe k. Da er det åpenbart at A er bygget opp fra P;k utelukkende ved hjelp av konnektivene ¬, –>. Satsen holder derfor i dette tilfellet. (b) D=μ(B) for noen formel B. Siden A da blir ¬μ(B) har vi at det finnes C;1,...,C;n,c;1,...,c;m (n=1, m=0 og B=C;1) slik at A er bygd opp fra μ(C;1),...,μ(C;n),c;1,...,c;m ved hjelp av utelukkende konnektivene ¬ og –>. (c) Er D bygd opp fra visse formler μ(C;1),...,μ(C;n),c;1,..,c;m der c;1,...,C;m er setningsbokstaver (m+n>0) ved hjelp av ¬ og –> er det åpenbart at det samme gjelder for ¬D.

Har man tilslutt at A=(D–>E) der D,E er formler i L;μ, er det i prinsippet ni muligheter som må undersøkes. Er D og E setningsbokstaver er det åpenbart at satsen holder. Er D eller E en setningsbokstav og den andre formelen av typen μ(B) er det også klart at satsen holder. I de tilfellene som gjenstår er det også meget lett å sjekke at satsen holder. Vi overlater dem derfor til leseren. Dette avslutter beviset for Lemma 1. **Q.E.D**.

Lemma 2 La ∏ være klassen av alle formler av typen μ(B) der BêFm(L;μ). La Δ være den miste formelmengden som inneholder ∏ og som er lukket under ¬ og –>. Da har man at Δ= C;μ.

Som man ser gir denne satsen en alternativ karakteristikk av mengden C;μ, dvs. klassen av de μ-lukkede formler.

Bevis: (a) Inklusjonen mot høyre: Denne bevises ved induksjon på Δ. Er AêΔ og A=μ(B) for en eller annen formel B er det klart at A er μ-lukket. (Se definisjonen av μ-lukket formel) Anta A er μ-lukket. Da er det nokså opplagt at også ¬A er μ-lukket. Anta tilslutt at A og B er formler som er μ-lukket. Da vil enhver forekomst av en setningsbokstav i A og B forekomme i en formel av typen μ(D). Men da vil det samme gjelde for alle setningsbokstavene i A–>B. Det følger at A–>B er μ-lukket.

(b) Inklusjonen mot venstre: Anta AêC;μ. da kan ikke A være noen setningsbokstav. I lys av Lemma 1 må da enten A=μ(B) for noe BêFm(L;μ) og i så fall er det åpenbart at AêΔ. Eller så er A bygd opp fra visse formler μ(C;1),...μ(C;n), c;1,...,c;m der c;1,...,c;m er setningsbokstaver og n+m>0. I dette tilfellet kan man ikke ha m>0. For i så fall vil c;1 forekomme i A på et eller annet sted som ikke er innenfor området til noen forekomst av μ. Derfor er m=0. Men da er A bygd opp utelukkende ved hjelp av ¬, –> fra formlene μ(C;1),...,μ(C;n) der C;1,...,C;nêFm(L;μ). Det følger derfor ved hjelp av definisjonen av Δ at AêΔ. Dette avslutter beviset. **Q.E.D**.

Lemma 3 Anta Δ Inkl Fm(L;μ) og at ∏ er den minste formelmengden som inneholder Δ og som er lukket under ¬, –> og μ. Anta RêM;μ og at:

(AC)(CêΔ –> R(C)ê{0,1}).

Da har man:

(AC)(Cê∏ –> R(C)ê{0,1}

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på ∏. Er CêΔ er det åpenbart at den holder. Dette følger fra forutsetningene i teoremet. Er C=¬D, D–>F eller μ(D) for noen formler D,F i L;μ har vi i lys av induksjonshypotesen at R(D),R(F)ê{0,1}. Det følger da fra definisjonen av modell at R(A)ê{0,1}. **Q.E.D.**

Lemma 4 Anta AêC;μ, dvs. at A er μ-lukket og at RêM;μ. Da gjelder R(A)ê{0,1}.

Bevis: La ∏ være klassen av alle formler av typen μ(B) der BêFm(L;μ) og la Δ være den minste mengden som inkluderer ∏ og som er lukket under –> og ¬. I lys av Lemma 2 har man da (1) Δ=C;μ. Nå fremgår det fra definisjonen av R at R(μ(B))ê{0,1} om BêFm(L;μ). Det følger at vi derfor må ha:

(AC)(Cê∏ –> R(C)ê{0,1})

Det vil være tilstrekkelig å vise: (2) (AC)(CêΔ –> R(C)ê{0,1}). Dette vises ved induksjon på Δ. Vi har allerede bevist basistrinnet. Anta R(D),R(F)ê{0,1} for D,FêΔ. Da har man ved hjelp av definisjonen av R at R(¬D), R(D–>F)ê{0,1}. Det følger at (2) holder. Siden AêC;μ følger ved hjelp av (1) og (2) at R(A)ê{0,1}. **Q.E.D.**

La p være en setningsbokstav som forekommer i A. Vi sier at en forekomst av p i A er μ-fri om denne forekomsten av p ikke befinner seg innenfor området til noen forekomst av μ, mao. ikke befinner seg i noen formel av typen μ(B) i A. En setningsbokstav forekommer

μ-fri A om den har en forekomst i A som er
μ-fri.

Lemma 5 Anta AêFm(L;μ) og ar R(A)=*. Da finnes det en setningsbokstav p i A som forekommer μ-fri og der vi har R(p)=*.

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. I lys av Lemma 1 er det da tre muligheter:
(i) Anta A=p;k for noe k. I så fall holder satsen helt trivielt.
(ii) Anta A=μ(B) for en eller annen formel B i L;μ. Dette tilfellet er imidlertid utelukket. For var dette tilfellet ville vi i lys av Lemma 4 ha R(A)ê{0,1} noe som strider mot våre forutsetninger.
(iii) Anta A er bygget opp ved hjelp av ¬, –> fra visse formler μ(C;1),...,μ(C;n),c;1,...c;r der c;1,...,c;r er setningsbokstaver. Da må vi ha at r>0 for ellers vil A være μ-lukket og dermed R(A)ê{0,1}. Dette strider igjen mot forutsetningen om at R(A)=*. De diverse c;1,...,c;r må derfor forekomme μ-fri i A. Anta mot formodning at R(c;s)ê{0,1} for alle sê{1,...,r}. Hvis da ∏ er den minste mengden som inneholder μ(C;1),...,μ(C;n),c;1,...c;r og som er lukket under ¬, –> har man ved hjelp av Lemma 3 at (AC)(Cê∏ –> R(C)ê{0,1}). Siden Aê∏ følger i så fall at R(A)ê{0,1}). Men dette strider mot at R(A) skal være *. Det følger at minst en av c;i'ene er slik at R(c;i)=*. Men alle forekom μ-fri i A. Satsen holder derfor også i dette tilfellet. **Q.E.D**.

Lemma 6 Anta AêFm(L;μ) og at A inneholder en forekomst av setningsbokstaven p;k for noe kêN hvor p;k ikke forekommer i noen formel av typen μ(B) der BêFm(L;μ). Er da R(p;k)=* har vi at R(A)=*

Bevis: Anta AêFm(L;μ) og at den andre forutsetningen holder. Anta R(p;k)=*. I følge Lemma 1 kan vi da sondre mellom tre tilfelle: (i) A=p;j for noe jêN. I dette tilfellet må j=k og satsen holder trivielt. (ii) A=μ(B) for en eller annen formel BêFm(L;μ). Da inneholder ikke A noen setningsbokstav som forekommer μ-fri. Dette tilfellet er derfor utelukket siden det strider mot forutsetningene. (iii) A er bygget opp fra visse formler μ(C;1),...,μ(C;n),c;1,...c;r der c;1,...,c;r er setningsbokstaver ved hjelp av bare ¬ og –>. Da må p:k være en av c;1,...,c;r. For i motsatt fall ville p;k forekomme i en av formlene μ(C;1),...,μ(C;n) og derfor ikke forekomme μ-fri. Siden R(p;k)=* følger da at R(A)=* ved hjelp av Lemma 7 nedenfor. **Q.E.D**.

Lemma 7 Anta μ(C;1),...,μ(C;n),c;1,...c;m er visse formler der c;1,...c;m (m>0) er setningsbokstaver i L;μ. La ∏ være de minste mengden som inneholder disse formlene og som er lukket under ¬ og –>. Anta Aê∏ og at A inneholder en forekomst av c;k som ikke i A forekommer i noen formel av typen μ(B). Anta R(A)ê{0,1}. Da gjelder R(c;k)ê{0,1}.

Bevis: Vi beviser satsen ved induksjon på ∏. Er A=μ(C;j) for jê{1,...,n} holder satsen tomt siden satsens konskvent får en usann antesedent. Er A=c;k holder satsen trivielt. Er A=c;r der r≠k holder den også trivielt siden forutsetningene ikke er oppfylt. Er A=¬D for noen formel DêFm(L;μ) har vi at D må inneholde en forekomst av c;k som ikke opptrer i noen formel av typen μ(B). Ved hjelp av induksjonshypotesen følger satsen i dette tilfellet. Er tilslutt A=(D–>F) må vi ha at D eller F må inneholde en slik μ-fri forekomst av c;k. Ved hjelp av induksjonshypotesen har vi da at R(A)ê{0,1}. **Q.E.D**.

Lemma 8 Anta AêFm(L;μ) og at (AR)(RêM;μ –> R(A)ê{0,1}). Da gjelder: AêC;μ

Bevis: Anta forutsetningene holder og anta for reduktio ad absurdum at ¬(AêC;μ). Dette innebærer at A ikke er μ-lukket. Da finnes det en setningsbokstav p;k og en forekomst av denne i A hvor p;k ikke er noen del av en eller annen formel av typen μ(B). Vi kan da lett konstruere en modell R;0 der R;0(p;k)=* og R;0êM;μ. Fra dette og Lemma 6 følger R;0(A)=*. Dette innebærer at ¬(R;0(A)ê{0,1}). Sammen med den andre forutsetningen i satsen gir dette oss en motsigelse. **Q.E.D**.

La oss igjen minne om at vi sier at en setningsbokstav p;k forekommer μ-fri i A om det finnes en forekomst av p;k i A hvor p;k ikke forekommer som en del av en formel av typen μ(B). Man ser fra denne definisjonen at en formel A er μ-lukket, ie. AêC;μ, hvis og bare hvis A ikke inneholder noen setningsbokstav som forekommer μ-fri i A.

§ 3.1

Etter disse hjelpesetningene kan vi nå lettere gi bevis for en del mer substansielle satser. Vi minner om at vi per definisjon setter:

Val;μ(A) <–> (AR)(RêM;μ –> R(A)=1)

Vi har:

Lemma 9 Anta A,B,CêC;μ. Da gjelder:

(a) Val;μ(A–>(B–>A))
(b) Val;μ((A–>(B–>C))–>((A–>B)–>(A–>C)))
(c) Val;μ((¬B–>¬A)–> ((¬B–>A) –>B))
(d) Val;μ(A) & Val;μ(A–>B) –> Val;μ(B)

Bevis: (a) Anta A,B,CêC;μ og anta mot formodning at det finnes en R der man har R(A–>(B–>A))≠1. Siden A,B,CêC;μ har vi i lys av Lemma 4 at R(A),R(B)ê{0,1}. Fra definisjonen av modell følger da R(B–>A)ê{0,1} og derfor at at R(A–>(B–>A))ê{0,1}. Det følger at R(A–>(B–>A))=0. Men herav R(A)=1 og R(B–>A)=0. Fra det siste og valuasjonsreglene for –> følger R(B)=1 & R(A)=0. Dette gir oss åpenbart en motsigelse.

(b) Anta mot formodning at det finnes en R slik at:

R((A–>(B–>C))–>((A–>B)–>(A–>C)))≠1. Fra forutsetningene og Lemma 4 følger da: R(A),R(B), R(C)ê{0,1}. Det følger at:

R((A–>(B–>C))–>((A–>B)–>(A–>C)))=0

Da har vi (1) R(A–>(B–>C))=1 og (2) R((A–>B)–>(A–>C))=0

Fra (2) følger (3) R(A–>B)=1 & R(A–>C)=0. Fra dette siste følger videre:

(4) R(A)=1 & R(C) =0. Dette og (3) gir en (5) R(B)=1. Men (4) og (5) impliserer at R(A–>(B–>C))=0 som åpenbart motsier (1).

(c) Dette tilfellet behandles som de to foregående og overlates til leseren.

(d) Anta Val;μ(A) & Val;μ(A–>B). Da har man per definisjon:

(1) (AR)(RêM;μ –> R(A)=1)
(2) (AR)(R^M;μ –> R(A–>B)=1)

Er da R en vilkårlig modell der RêM;μ har vi R(A)=1 & R(A–>B)=1. Men fra disse to tingene og definisjonen av modell følger R(B)=1. Siden R var vilkårlig følger Val;μ(B). **Q.E.D.**

Lemma 10 Er A,BêFm(L;μ) har vi:

(a) Val;μ(μ(¬A) –> ¬μ(A))

(b) Val;μ(μ(A–>B) <–> [(μ(A)&μ(B)) v (μ(¬A)&μ(B)) v (μ(¬A)&μ(¬B))])

(c) Er AêC;μ har man Val;μ(A<–>μ(A))

(d) Er CêFm(L;μ) og er p;1,...,p;n(n>0) nøyaktig de setningsbokstavene som forekommer μ-fri i C har man:

Val;μ(Konj/i,1,n/(μ(p;i v¬p;i)) <–> μ(C)vμ(¬C))

Bevis: (a) Anta AêFm(L;μ). Det er tre muligheter når det gjelder RêM;μ: R(A) kan være identisk med 1, 0 eller *. Anta R(A)=1. Da har vi R(¬A)=0 og derfor R(μ(¬A))=0. Videre har vi i dette tilfellet at R(μ(A))=1 og derfor R(¬μ(A))=0. Det følger at R(μ(¬A) –> ¬μ(A))=1. Har man at R(A)=* har vi åpenbart at R(μ(¬A))=0 og R(¬μ(A))=1. Da må man ha: R(μ(¬A) –> ¬μ(A))=1. Har man tilslutt at R(A)=0 følger R(μ(¬A))=1 og R(¬μ(A))=1. Men da R(μ(¬A) –> ¬μ(A))=1. Dette viser at μ(¬A) –> ¬μ(A) blir tilordnet 1 i alle tilfelle. Det følger at :
Val;μ(μ(¬A) –> ¬μ(A)) holder.

(b) Anta RêM;μ for en eller annen vilkårlig modell R. Anta R(μ(A–>B))=1. Da har vi i lys av definisjonen av modell at R(A–>B)=1. Det følger da at vi enten må ha (1) R(A)=R(B)=1 eller at (2) R(A)=0 & R(B)=1 eller at R(A)=R(B)=0. I tilfelle (1) ser man lett at R(μ(A))=R(μ(B)) =1 og derfor at R(μ(A)&μ(B))=1. Tilsvarende ved tilfellene (2) og (3). Da tilordner R såvel μ(¬A)&μ(B) som μ(¬A)&μ(¬B) verdien 1. Man ser altså at hele høyre side i formelen nevnt under (b) tilordnes verdien 1. På tilsvarende vis ser man at hvis høyre side i (b) tilordnes 1 må vi ha at et av tilfellene (1) – (3) ovenfor holder. Men i alle disse tilfellene følger R(μ(A–>B))=1. Man ser altså at høyre side i bikondisjonalen under punkt (b) blir tilordnet 1 hvis og bare hvis venstre side blir det. Videre er også de to hovedkomponentene i denne bikondisjonalen μ-lukket. Derfor kan de ikke tilordnes verdien * av R. Det følger at hele formelen må tilordnes 1. Dette innebærer at formelen er μ-gyldig.

(c) Anta AêC;μ og at R er en vilkårlig modell i M;μ. Fra Lemma 4 følger da at R(A)ê{0,1}. Anta R(A)=0. Da har man R(μ(A))=0. Fra dette følger at R(A<–>μ(A))=1. Anta på den annen side på den annen side at R(A)=1. Da må vi ha R(μ(A))=1 og derfor R(A<–>μ(A))=1. I alle tilfelle har vi at R(A<–>μ(A))=1. Dette viser at påstanden holder.

(d) Anta CêFm(L;μ) og at p;1,...,p;n(n>0) er nøyaktig de setningsbokstavene i C som forekommer μ-fri. La R være en vilkårlig modell. Det vil være nok å vise ar R tilordner skjemaet:

Konj/i,1,n/(μ(p;i v¬p;i)) <–> μ(C)vμ(¬C)

verdien 1,siden begge sider her er μ-lukket, og derfor i følge Lemma 4 enten blir tilordnet verdien 1 eller verdien 0 av R. Fra dette følger det i sin tur at det vil være tilstrekkelig å vise at R tilordner venstre side verdien 1 hvis og bare hvis R tilordner høyre side verdien 1. Anta derfor R(Konj/i,1,n/(μ(p;i v¬p;i)))=1. Dette innebærer at R(μ(p;i v¬p;i))=1 for iê{1,...,n}. Anta for reduktio ad absurdum at R(μ(C)vμ(¬C))≠1. Da må vi ha at R(μ(C)vμ(¬C))=0. Fra dette følger R(μ(C))=0. Da har vi R(C)ê{0,*}. Er R(C)=0 har man at R(¬C)=1 og derfor at R(μ(¬C))=1. Men i så fall følger R(μ(C)vμ(¬C))=1 som er umulig. Derfor må man ha R(C)=*. Siden p;1,....,p;n er nøyaktig de setningsbokstavene som forekommer μ-fri i C har vi i følge Lemma 5 og det at R(C)=* at R(p;k)=* for noen kê{1,...,n}. Men også dette er umulig fordi vi nettopp antar at R(p;i)ê{0,1} for alle iê{1,...,n}.

Anta på den annen side at R(μ(C)vμ(¬C))=1. Da har man R(C)ê{0,1}. (Jmf. definisjonen av modell R). Det følger i så fall ved hjelp av Lemma 6 at R(p;i)ê{0,1} for i=1,...,n. Herav R(Konj/i,1,n/(μ(p;i v¬p;i)))=1. Dette avslutter beviset for Lemma 10. **Q.E.D**.

§ 4 En aksiomatisering av S*;μ

S;μ er det formale system som har L;μ som sitt språk, modus ponens som eneste slutningsregel og der aksiomene er avgrenset på følgende måte:

(i) Er A,B,CêC;μ så er følgende formler aksiomer:
A1 A–>(B–>A)
A2 (A–>(B–>C))–>((A–>B)–>(A–>C))
A3 (¬B–>¬A)–> ((¬B–>A) –>B)

(ii) Er AêC;μ så er den følgende formel et aksiom:
A4 A<–>μ(A)

(iii) Er p;1,...,p;n der n>0 nøyaktig de setningsbokstavene som forekommer μ-fri i CêFm(L;μ) så er følgende formel et aksiom:
A5 Konj/i,1,n/(μ(p;i v¬p;i)) <–> μ(C)vμ(¬C)

(iv) Er A,BêFm(L) så er den følgende formel et aksiom:
A6 μ(A–>B) <–> [(μ(A)&μ(B)) v (μ(¬A)&μ(B)) v (μ(¬A)&μ(¬B))]

(v) Er AêFm(L;μ) så er følgende formel et aksiom:
A7 μ(¬A) –> ¬μ(A)

Dette avslutter oversikten over aksiomer.

Det kan være hensiktsmessig å fremsette noen forklarende bemerkninger i forbindelse med systemet S;μ. For det første er klassen av teoremene i S;μ, vi betegner denne klassen med "Th(S;μ)", den minste formelmengden i L;μ som inneholder alle aksiomene som er nevnt ovenfor og som er lukket under modus ponens. Videre nevnes det at et bevis i S;μ her defineres som en endelig formelsekvens der hver formel enten er et aksiom i den betydningen som er nevnt eller er sluttet fra tidligere formler i sekvensen ved hjelp av modus ponens. En formel A er bevisbar i S;μ i symboler "Bev(S;μ, A)", hvis og bare hvis A er det siste ledd i et bevis i S;μ. Det er lett å vise at enhver formel som er et teorem i S;μ er bevisbar i S;μ og omvendt. Dette innebærer at vi har:

Lemma 11 (AB)(BêFm(L;μ) –> (Bev(S;μ, B) <–> BêTh(S;μ)))

Bevis: Beviset skjer ved henholdsvis induksjon på mengden av teoremer i S;μ og ved induksjon på lengden av bevis i S;μ. Det overlates til leseren. **Q.E.D**.

Fra Lemma 9 og Lemma 10 fremgår det at alle aksiomene i S;μ er μ-gyldige og at modus ponens leder fra μ-gyldige formler til μ-gyldige formler. Det følger da at alle teoremene i S;μ er μ-gyldige og dermed i lys av Lemma 11 at alle formler som er bevisbare i S;μ også er det. Dette innebærer at man har:

Teorem 1 (Gyldighetsteorem)
(a) (AB)(BêFm(L;μ)–> (BêTh(S;μ) –> Val;μ(B)))
(b) (AB)(BêFm(L;μ) –> (Bev(S;μ, B) –> Val;μ(B)))

Vi nevner også det følgende forhold: La L være språket til den vanlige setningskalkylen PC, ie. språket hvis vokabular er setningsbokstavene p;1, p;2,.... osv., konnektivene ¬ og –> samt parantestegnene, og hvor formlene dannes på vanlig måte. La S være det aksiomatiske system for setningslogikk som har alle formler av typen A1 – A3 som aksiomer og modus

ponens som eneste slutningsregel. La konnektivene "&", "v" og "<–>" være innført ved de vanlige definisjonene og definer teorem, bevis og bevisbarhet for dette system i analogi med de definisjoner som ble gitt ovenfor for systemet S;μ. Under disse forutsetninger gjelder den følgende sats:

Lemma 12 (a) Anta A;1,...,A;n er et bevis i S. La A;1',...,A;n' være den formelrekken som fremkommer når alle setningsbokstavene som forekommer i A;1,...,A;n erstattes med μ-lukkede formler i L;μ . (Erstatningene skjer uniformt) Da er A;',...,A;n' et bevis i S;μ.

(b) Er A et teorem i S og er A' resultatet av å erstatte uniformt alle setningsbokstaver i A med formler i C;μ er A' et teorem i S;μ.

Bevis: Beviset for punkt (a) skjer ved induksjon på lengden av bevis. Punkt (b) følger fra (a). Detaljene overlates til leseren. **Q.E.D**.

Som et eksempel nevnes at siden (p;1&p;2) <–> ¬((¬p;1)&(¬p;2)) er et teorem i S er (A&B) <–> ¬((¬A)&(¬B)) et teorem i S;μ om A,BêC;μ.

§ 5 Fullstendighet.

Vi vil nå bevise det omvendte av gyldighetsteoremet, nemlig at S;μ er fullstendig. I første omgang vil det bli bevist at følgende teorem holder:

Teorem 2 (AB)(BêFm(L;μ) & Val;μ(B) –> Bev(S;μ, A))

Sammen med Teorem 1 viser denne setningen at bevisbarhet i systemet S;μ er det samme som μ-gyldighet. Dette innebærer at S;μ er en aksiomatisering av klassen av de μ-gyldige formlene i L;μ og gir oss derfor en løsning på aksiomatiseringsproblemet for denne formelmengden.

Det er lett å se at Teorem 2 er ekvivalent med:

(1) (AB)(BêFm(L;μ) & (AR)(RêM;μ –> R(B)=1) –> Bev(S;μ, B))

Nå har man i lys av Lemma 8 at:

(2) (AR)(RêM;μ –> R(B)=1) –> BêC;μ

Ved hjelp av (2) kan man vise at (1) er ekvivalent med:

(3) (AB)(BêC;μ & (AR)(RêM;μ –> R(B)=1). –> Bev(S;μ, B)

Ved konversjon er (3) ekvivalent med:

(4) (AB)((BêC;μ & ¬Bev(S;μ,B)) –> (ER)(RêM;μ & R(B)≠1))

Nå har man i lys av Lemma 4 at:

(5) (AB)(BêC;μ –> R(B)ê{0,1})

(4) er derfor ekvivalent med:

(6) (AB)((BêC;μ & ¬Bev(S;μ,B)) –> (ER)(RêM;μ & R(B)=0))

Siden man har at (AB)(BêC;μ –> (¬B)êC;μ) er så (6) i sin tur ekvivalent med:

(7) (AB)((BêC;μ & ¬Bev(S;μ,¬B)) –> (ER)(RêM;μ & R(B)=1))

i lys av at man også har: (AB)(BêC;μ –> (Bev(S;μ, B) <–> Bev(S;μ,¬¬B)))

For å bevise Teorem 2 er det derfor helt tilstrekkelig å bevise (7). Dette er da også det som vil bli gjort i det følgende.

§ 5.1

Vårt bevis for (7) er et standard Henkin-bevis. Anta B er en vilkårlig formel der vi har at BêC;μ & ¬Bev(S;μ,¬B). Det vil da bli vist hvordan man kan konstruere en såkalt maksimalt konsistent mengde ∏ som inneholder B. Dernest vil det bli vist hvordan man kan, gitt ∏, konstruere en modell R;∏ der R;∏(B)=1. Dette vil være tilstrekkelig for å bevise (7).

§5.2

Vi sier at en formel BêFM(L;μ) er konsistent med hensyn på S;μ hvis og bare hvis ¬(Bev(S;μ, ¬B) & BêC;μ. Anta Δ={B;1,...,B;n} Inkl C;μ. Da sies Δ å være S;μ-konsistent hvis og bare hvis ¬Bev(S;μ, ¬(B;1&....& B;n)).

Er Δ Inkl C;μ og er Δ en uendelig formelmengde sies Δ å være S;μ-konsistent hvis og bare hvis ingen endelig delmengde av Δ er S;μ-inkonsistent. Tilslutt sier vi at en formelmengde Δ er maksimalt S;μ-konsistent hvis og bare hvis Δ er S;μ-konsistent og det ikke finnes noen formel BêC;μ slik at ¬(BêΔ) og hvor ΔU{B} er S;μ-konsistent.

Først vil det bli gitt et bevis for den følgende hjelpesetning:

Lemma 13 Anta Δ er en S;μ-konsistent formelmengde. Da finnes det en maksimalt S;μ-konsistent formelmengde ∏ slik at Δ Inkl ∏.

Satsen sier altså at enhver konsistent mengde kan utvides til maksimalt konsistent mengde.

Bevis: Siden C;μ er en tellbart uendelig mengde finnes det en enummerering av formlene i C;μ. La B;0 betegne det første leddet i denne enummereringen. "B;n" betegner det n-te ledd i den. I relasjon til denne enummereringen definerer vi en sekvens ∏;n av S;μ-konsistende mengde på den følgende måte:

(a) ∏;0 = Δ
(b) Anta ∏;n er gitt. Er da ∏;nU{B;n} S;μ-konsistent setter vi ∏;(n+1) = ∏;nU{B;n}. I motsatt fall setter vi ∏;(n+1)= ∏;n.

La oss først bemerke at man har:

(I) ∏;n Inkl ∏;(n+1) for alle nêN.

Dette fremgår temmelig direkte fra definisjonen av ∏;n. Dernest skal vi gi bevis for:

(II) For alle nêN har man at ∏;n er S;μ-konsistent.

Dette vises ved induksjon på n. Satsen holder for n=0 siden ∏;0=Δ og Δ per hypotese er S;μ-konsistent. Anta ∏;n er S;μ-konsistent. Da er ∏;(n+1)=∏;nU{B;n} om ∏;nU{B;n} er S;μ-konsistent. I så fall er ∏;(n+1) S;μ-konsistent. I motsatt fall er ∏;(n+1)=∏;n og da er ∏;(n+1) åpenbart S;μ-konsistent i kraft av induksjonshypotesen.

Vi setter ∏= UN/n,0,∞/(∏;n). Vi vil nå vise at:

(III) ∏ er S;μ-konsistent.

Anta for reduktio ad absurdum at det motsatte er tilfelle. Da finnes det en endelig delmengde Δ'={C;1,...,C;n} av ∏ som er S;μ-inkonsistent. Siden Δ' Inkl C;μ er de diverse C;i-ene formler som dukker opp i enummereringen B. Siden Δ' Inkl ∏ Inkl UN/n,0,∞/(∏;n) må hver av de enkelte C;i-ene være med i ∏;(k;i) for et visst naturlig tall k;i. La k;q være Max{k;i: iê{1,...,n}}. Da har vi i lys av (I) at Δ' Inkl ∏;(k;q). Men fra (II) følger at ∏;(k;q) er konsistent. Da må også Δ' være S;μ-konsistent. Dette gir oss en motsigelse og viser at (III) holder.

Siden Δ =∏;0 Inkl UN/n,0,∞/(∏;n) følger det at det nå er nok å vise at ∏ er maksimalt konsistent. Anta derfor for reduktio ad absurd at det finnes en formel DêC;μ slik

at ¬(Dê∏) og der ∏U{D} er S;μ-konsistent. Siden DêC;μ har vi D=B;k for noe kêN. Siden ∏U{D} er konsistent har vi at ∏U{D}=∏U{B;k} er konsistent. Da har vi videre at D=B;kê∏;(k+1) = ∏;kU{B;k} Inkl ∏. det følger at ∏ er maksimalt S;μ-konsistent. Dette avslutter beviset for Lemma 13. **Q.E.D**.

Vår neste hjelpesetning er denne:

Lemma 14 Anta ∏ Inkl C;μ og at ∏ er maksimalt S;μ-konsistent. Da har ∏ de følgende egenskaper:

(a) (AB)(BêC;μ –> ¬(Bê∏ & (¬B)ê∏)
(b) (AB)(BêC;μ –> (Bê∏ v (¬B)ê∏)
(c) (AB)(AD)(B,DêC;μ & Bê∏ & (B–>D)ê∏ –> Dê∏)
(d) (AB)((BêC;μ & Bev(S;μ,B)) –> Bê∏)
(e) (AB)(AD)(B,DêC;μ & Bê∏ & Bev(S;μ, B–>D) –> Dê∏)

Bevis: (a) Anta hypotesene i teoremet holder og at B er et vilkårlig element i C;μ. Anta for reduktio ad absurdum at Bê∏ & (¬B)ê∏. Da har man {B,¬B} Inkl ∏. men Bev(S;μ, ¬(B&¬B)). Derfor vil {B,¬B} være S;μ-inkonsistent. Men ∏ er bare S;μ-konsistent om den ikke inneholder noen endelig S;μ-inkonsistent delmengde. Det følger at ∏ er S;μ-inkonsistent. Men dette strider mot hypotesene i teoremet.

(b) Anta BêC;μ for vilkårlig B og anta for reduktio ad absurdum at ¬(Bê∏) og at ¬((¬B)ê∏). Siden ∏ er maksimalt S;μ-konsistent følger da at ∏U{B} såvel som ∏U{¬B} er inkonsistente. Dette innebærer at det finnes to endelige mengder Δ;1, Δ;2 Inkl ∏ slik at Δ;1U{B} og Δ;2U{¬B} er inkonsistente. La D;1 og D;2 være henholdsvis konjunksjonene av elementene i Δ;1 og Δ;2. Da har vi:

(1) Bev(S;μ, ¬(D;1&B))
(2) Bev(S;μ, ¬(D;2&¬B))

Men vi har siden B,D;1,D;2êC;μ at:

(3) Bev(S;μ, ¬(D;1&B) –> (¬(D;2&¬B) –> ¬(D;1&D;2)))

Fra (1) – (3) følger ved hjelp av modus ponens at Bev(S;μ, ¬(D;1&D;2)). Men dette impliserer at Δ;1UΔ;2 er S;μ-inkonsistent og derfor at ∏ er det siden Δ;1UΔ;2 Inkl ∏. Dette strider mot forutsetningen om at ∏ er en maksimalt S;μ-konsistent mengde.

(c) Anta Bev(S;μ, B) og at BêC;μ. Da har man at ¬¬Bev(S;μ,¬¬B). Dette innebærer at ¬B er inkonsistent med hensyn på S;μ. Hadde vi da (¬B)ê∏ ville ∏ være S;μ-inkonsistent, noe som er umulig siden ∏ etter forutsetning skal være maksimalt S;μ-konsistent og derfor S;μ-konsistent. Det følger at ¬((¬B)ê∏). Men fra dette og det som ble bevist under punkt (b) følger Bê∏.

(d) Anta for reduktio ad absurdum at Bê∏ & Bev(S;μ, B–>D) og at ¬(Dê∏) for noen formler B,DêC;μ. Da har vi (¬D)ê∏ ifølge punkt (b) og derfor i lys av foregående punkt at {B, B–>D,¬D} Inkl ∏. Nå har man:

Bev(S;μ, ¬(B&(B–>D) &¬D))

Det følger derfor at {B, B–>D,¬D} er S;μ-inkonsistent. Dette impliserer at ∏ også er S;μ-inkonsistent siden den inneholder en inkonsistent delmengde. Dette strider imidlertid mot forutsetningen om at ∏ er konsistent. Antagelsen er derfor umulig. Dette viser at punkt (d) holder.

(e) Anta for vilkårlige B,DêC;μ at Bê∏ & Bev(S;μ, B–>D). I lys av punkt (d) har vi da (B–>D)ê∏ og da følger ved hjelp av punkt (c) at Dê∏. Dette avslutter beviset for Lemma 14. **Q.E.D**.

Man kan bemerke i forbindelse med dette beviset at vi her bare har benyttet definisjonene av S;μ-konsistent mengde og maksimalt S;μ-konsistent mengde samt visse egenskaper angående bevisbarhet til formler i kalkylen S;μ. Spesielle egenskaper som er forbundet med konstruksjonen av ∏ i beviset for Lemma 13 ble ikke benyttet her.

§ 5.3

Anta nå at ∏ er en maksimalt S;μ-konsistent mengde. Vi vil med ∏ assosiere en bestemt modell R;∏. Denne vil bli omtalt som den kanoniske modell over ∏. Denne er definert ved de følgende stipulasjoner:

(a) R;∏(p;k) =1 hvis og bare hvis μ(p;kv¬p;k)ê∏ & μ(p;k)ê∏
(b) R;∏(p;k) =0 hvis og bare hvis μ(p;kv¬p;k)ê∏ & ¬(μ(p;k)ê∏)
(c) R;∏(p;k) =* hvis og bare hvis ¬(μ(p;kv¬p;k)ê∏)

Dermed er modellen R;∏ entydig bestemt for enhver maksimalt konsistent mengde ∏.

Vi skal nå gi et bevis for den følgende viktige hjelpesetning om slike "kanoniske" modeller:

Lemma 15 Anta ∏ er en maksimalt S;μ-konsistent formelmengde i L;μ. Da holder følgende to påstander:
(a) (AB)(BêC;μ –> (R;∏(B)=1 <–> Bê∏))
(b) (AB)(BêFm(L;μ) –> (R;∏(μ(B))=1 <–> μ(B)ê∏))

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Vi skal først gi et bevis for punkt (b):

(I) Denne delen av satsen bevises ved induksjon på lengden av formler i L;μ:

(i) B=p;k for noe kêN, dvs. at B er en setningsbokstav. Anta først at (1) R(μ(p;k)) =1. (Vi sløyfer fra nå av indeksen "∏" i "R;∏" siden skulle fremgå klart av sammenhengen hva vi mener når vi skriver "R(B)"). Fra (1) og definisjoen av R følger R(p;k)=1. Fra dette og definisjonen av R;∏ har vi at μ(p;kv¬p;k)ê∏ og μ(p;k)ê∏. Kondisjonalen mot høyre i konsekventen i (b) holder altså om B=p;k.

Anta på den annen side at R(μ(p;k))≠1. Valuasjonsregelen for formler av typen μ(D) impliserer da at R(μ(p;k))=0. Dette innebærer at R(p;k)ê{*,0}. I tilfelle R(p;k)=* har vi ifølge definisjonen av R at ¬(μ(p;kv¬p;k)ê∏). Fra dette følger ved hjelp av Lemma 14 at (2) (¬(μ(p;kv¬p;k))ê∏. Nå har vi at

(μ(p;kv ¬p;k) <–> μ(p;k)vμ(¬p;k))

er en instans av A5 og derfor et teorem i S;μ. Ved hjelp av setningslogikk har man da:

Bev(S;μ, (¬μ(p;kv¬p;k)) <–> (¬μ(p;k) & ¬μ(¬p;k)))

Fra dette, (2), Lemma 14 punkt (e) følger (¬μ(p;k))ê∏. Men herav kan vi ved hjelp av Lemma 14 slutte: ¬(μ(p;k)ê∏). Kondisjonalen mot venstre i konsekventen i (b) holder derfor i dette spesielle tilfellet. Er R(p;k)=0 har vi i følge definisjonen av R;∏ at μ(p:kv¬p;k)ê∏ & ¬(μ(p;k)ê∏). Satsen holder derfor triviellt i dette tilfellet. Dette viser at (b) holder om B er en setningsbokstav.

(ii) Anta B=(¬C) og at påstanden (b) holder for C. Anta først at (1) R(μ(¬C))=1. Da har vi i kraft av valuasjonsreglene for μ og ¬ at R(¬C)=1. Dette innebærer at (2) R(C)=0. Da må vi ha R(μ(C))=0 og ved hjelp av induksjonshypotesen kan

vi herav slutte ¬(μ(C)ê∏). Fra dette følger ved hjelp av Lemma 14 at (¬μ(C))ê∏. Anta q;1,...,q;n er de setningsbokstavene som forekommer μ-fri i C. I lys av A5 har man:

(3) Bev(S;μ, Konj/i,1,n/(μ(q;i v¬q;i)) –> μ(C)vμ(¬C)))

Fra Lemma 6 følger nå at hvis R(q;i)=* for noen iê{1,...,n} må man også ha at R(C)=*. Dette strider imidlertid mot (2). Det følger derfor at R(q;i)ê{0,1} for iê{1,...,n}. Fra definisjonen av R;∏ følger da μ(q;i v¬q;i)ê∏ for i=1,...,n. Herav følger så ved hjelp av setningslogikk (4) Konj/i,1,n/(μ(q;iv¬q;i))ê∏. Dette, (3) og Lemma 14 impliserer at (5) (μ(C)vμ(¬C))ê∏. Fra dette og det at ¬(μ(C)ê∏) følger siden:

Bev(S;μ, ¬μ(C) –>(μ(C)vμ(¬C) –> μ(¬C)))

μ(¬C)ê∏. Påstanden holder derfor i dette tilfellet.

Anta på den annen side at C ikke inneholder noen μ-fri forekomster av setningsbokstaver. Da har man CêC;μ. Det følger at Bev(S;μ, Cv¬C). I lys av A4 har vi både at Bev(S;μ, ¬C <–> μ(¬C)) og Bev(S;μ, C<–>μ(C)). Fra disse tre forhold følger at Bev(S;μ, μ(C)vμ(¬C)). Fra Lemma 14, punkt (d), følger da (μ(C)vμ(¬C))ê∏. På samme måte som rett ovenfor konkluderer vi da med at μ(¬C)ê∏. Vi har dermed vist kondisjonalen mot høyre i konsekventen i (b) i det tilfelle at B=(¬C).

Anta R(μ(¬C))≠1. Da må man ha at R(μ(¬C))=0 og følgelig at R(¬C)ê{0,*}. Det følger at R(C)ê{1,*}. Har man nå R(C)=* følger ved hjelp av Lemma 5 at R(p;k)=* for minst en setningsbokstav som har en μ-fri forekomst i C. Fra konstruksjonen av R;∏ følger da ¬(μ(p;kv¬;pk)ê∏). Ved hjelp av Lemma 14 følger fra dette: (¬μ(p;kv¬;pk))ê∏. Ved hjelp av A5 har vi:

Bev(S;μ, ¬μ(P;kv¬p;k) –> ¬μ(¬C)). Fra disse to ting og Lemma 14 følger (¬μ(¬C))ê∏ og derfor ¬(μ(¬C)ê∏). Dermed har vi bevist at (b) holder om B=(¬C).

(iii) B=μ(C) for noen forml CêFm(L;μ). Da har vi om R(μ(B))=1 at R(B)=1. Dette innebærer R(μ(C))=1. Fra induksjonshypotesen følger da μ(C)ê∏. Nå har man i følge A4 at Bev(S;μ, μ(C) <–> μ(μ(C))) i det μ(C) jo må være μ-lukket. Ved hjelp av Lemma 14 følger da μ(μ(C))=μ(B)ê∏.

Er på den annen side R(μ(B))≠1 har man at R(μ(B))=0. Da følger R(μ(C))ê{0,*}. Siden det er utelukket at R(μ(C))=* har man R(μ(C))=0 og derfor at R(μ(C))≠1. Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da ¬(μ(C)ê∏). Ved hjelp av A4 har man at Bev(S;μ, ¬μ(C) <–> ¬μ(μ(C))). Det følger da at (¬μ(μ(C)))ê∏. Benyttes Lemma 14 ser man at man herav kan slutte ¬(μ(μ(C))ê∏). Dette er ekvivalent med ¬(μ(B)ê∏) siden B=μ(C). Dette viser at (b) holder om B=μ(C).

(iv) Det gjenstår å betrakte det tilfellet at B=(C–>D) for noen formler C,DêFm(L;μ).

Kondisjonalen mot høyre:

Anta R(μ(C–>D))=1. Det følger at R(C–>D)=1. Fra valuasjonsregelen for –> kan man da slutte at ett av følgende tre tilfeller foreligger: (c1) R(C)=R(D)=1. (c2) R(C)=0=R(D). (c3) R(C)=0 & R(D)=1. Vi ønsker å vise at μ(C–>D)ê∏ i alle disse tre tilfellene.

Tilfelle c1: R(C)=1=R(D). Da følger R(μ(C))= R(μ(D))=1 og følgelig ved hjelp av induksjonshypotesen at (1) μ(C)ê∏ & μ(D)ê∏. Nå har vi, siden A6 er et aksiom at Bev(S;μ, μ(C) –>(μ(D) –>μ(C–>D))). Fra dette, (1) og Lemma 14 følger μ(C–>D)ê∏.

Tilfelle c2: R(C)=0=R(D). Da har vi R(μ(C))= R(μ(D))=0. Fra induksjonshypotesen følger ¬(μ(C)ê∏) og ¬(μ(D)ê∏). Siden R(C) =0 må vi her sondre mellom to undertilfelle:

Undertilfelle c2.1: Ingen forkomster av setningsbokstaver i C er μ-fri. Da har man CêC;μ og derfor ved hjelp av A1–A3 at Bev(S;μ, Cv¬C). Ved hjelp av A4 følger da Bev(S;μ, μ(C)vμ(¬C)). I lys av Lemma 14 kan vi slutte fra dette at

μ(C)vμ(¬C)ê∏. Siden ¬(μ(C)ê∏) følger da (¬μ(C))ê∏. Siden

Bev(S;μ, ¬μ(C) –> (μ(C)vμ(¬C) –> μ(¬C)))

følger i dette tilfelle at: μ(¬C)ê∏.

Undertilfelle c2.2: Minst en setningsbokstav, la oss si q, forekommer μ-fri i C. Er da R(q)=* har vi ifølge Lemma 6 at R(C)=*. Dette er imidlertid umulig. Det følger at R(q)ê{0,1} og derfor i lys av konstruksjonen til den kanoniske modellen R at μ(qv¬q)ê∏. Dette vil gjelde for alle de setningsbokstavene p;1,...,p;n som forekommer μ-fri i C. Vi har derfor μ(p;iv¬p;i)ê∏ for i=1,..,n. Da kan vi slutte at Konj/i,1,n/(μ(p;iv¬p;i))ê∏. I lys av A5 og Lemma 14 innebærer dette at (μ(C)vμ(¬C))ê∏. På samme måte som under Undertilfelle c2.1 argumenterer man da for at μ(¬C)ê∏.

På nøyaktig samme måte som vi ovenfor har vist at R(C)=0 impliserer at μ(¬C)ê∏, kan man vise at R(D)=0 impliserer μ(¬D)ê∏. Vi har derfor μ(C)&μ(¬C)ê∏. Ved hjelp av A6 og Lemma 14 utleder vi herav μ(C–>D)ê∏.

Tilfelle c3: R(C)=0 & R(D)=1. Som i de tidligere tilfellene utleder vi da μ(¬C)ê∏ & μ(D)ê∏. Ved hjelp av A6 og Lemma 14 kan vi da utlede, på måten som er demonstrert ovenfor, at μ(C–>D)ê∏. Dette viser at kondijonalen mot høyre i konsekventen i (b) holder om B=(C–>D).

Kondisjonalen mot venstre:

Anta R(μ(C–>D))≠1. I lys av valuasjonsregelen for μ følger da at R(μ(C–>D))=0 og derfor videre at R(C–>D)ê{*,0}. Her må vi sondre mellom to tilfelle:

(d1) R(C–>D)=* og (d2) R(C–>D)=0.

Tilfelle d1: Da har vi enten at R(C)=* eller at R(D)=*. Vi ser bare på det første av disse to undertilfellene siden det andre kan behandles på akkurat samme måte. Er R(C)=* har vi R(μ(C))=0. Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da ¬(μ(C)ê∏). Siden R(C)=* har vi i lys av Lemma 5 at det finnes en setningsbokstav i C, la oss si p;k, som forekommer μ-fri i C og der R(p;k)=*. Da har man i lys av konstruksjonen av R;∏ at (¬μ(p;kv¬p;k))ê∏. I lys av A5 og Lemma 14 har vi da (¬μ(C) & ¬μ(¬C))ê∏. Ved hjelp av A6 og Lemma 14 følger da (¬(μ(C–>D))ê∏. Dette innebærer ¬(μ(C–>D)ê∏) som nettopp er det vi ønsker.

Er R(D)=* utleder vi på samme måte (¬μ(D)&¬μ(¬D))ê∏, og dernest at ¬(μ(C–>D)ê∏) ved hjelp av A6 og Lemma 14.

Tilfelle d2: R(C–>D)=0. Da har vi i lys av valusajonsregelen for –> at R(C)=1 & R(D)=0. Vi kan da på samme måte som i tidligere avsnitt utlede at μ(C)ê∏ & μ(¬D)ê∏. Ved hjelp av A7 og Lemma 14 får vi i så tilfelle at

(μ(C)&¬μ(¬C))ê∏ & (μ(¬D)&¬μ(¬D))ê∏.

Fra dette, A6 og Lemma 14 utleder man ¬(μ(C–>D)ê∏)

Dermed har vi bevist at (b) i Lemma 15 også holder i det tilfellet at B=(C–>D). Dette avslutter beviset for (b).

(II) Vi gir så et bevis for punkt (a) i Lemma 15. Siden C;μ er den minste mengde som inneholder Mg(μ(B): BêFm(L;μ)) og som er lukket under ¬ og –> vises påstanden ved induksjon på C;μ.

Basistrinnet er allerede bevist under (I) ovenfor og består nettopp i å bevise punkt (b) i Lemma 15. Dette har vi nå gjort.

Anta satsen holder for B. Vi ønsker da å vise at den også holder for ¬B. Anta R(¬B)=1. Da følger R(B)=0. Ved hjelp av induksjonshypotesen har man herav ¬(Bê∏). Da har vi siden BêC;μ at (¬B)ê∏ ved hjelp av Lemma 14.

Omvendt har man om (¬B)ê∏ at ¬(Bê∏). Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da R(B)≠1. Men siden BêC;μ følger R(B)ê{0,1} og følgelig at R(¬B)=1.

Anta satsen holder for C,DêC;μ. Vi vil vise at den da også holder for

(C–>D). Anta derfor (C–>D)êC;μ. Da må C,DêC;μ. Er R(C–>D)=1 sondrer vi mellom tre tilfelle:

Tilfelle e1: R(C)=R(D)=1. I så fall har vi etter induksjonshypotesen at C,Dê∏ . Siden C,DêC;μ har man da:

Bev(S;μ, C–>(D–>(C–>D)))

Ved hjelp av Lemma 14 følger i så fall (C–>D)ê∏ som er det vi ønsker.

Tilfelle e2: R(C)=0. Siden CêC;μ følger da ved hjelp av induksjonshyptesen at ¬(Cê∏). Herav (¬C)ê∏ ved hjelp av Lemma 14. Siden Bev(S;μ, ¬C–>(C–>D)) om C,DêC;μ har man også i dette tilfellet at (C–>D)ê∏ ved hjelp av Lemma 14.

Anta på den annen side at R(C–>D)≠1. Da har vi R(C–>D)=0 siden C,DêC;μ. Da følger R(C)=1 & R(D)=0. Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da Cê∏ & (¬D)ê∏. Siden Bev(S;μ, C–>(¬D–>¬(C–>D))) om C;DêC;μ følger ved hjelp av Lemma 14 at (¬(C–>D))ê∏ og derfor ¬((C–>D)ê∏). Dette avslutter beviset for punkt (a) i satsen.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Lemma 15. **Q.E.D**.

§ 5.4 Avslutning av fullstendighetsbeviset for S;μ

Vi kan nå avslutte vårt bevis for Teorem 2, dvs. fullstendighetsteoremet for kalkylen S;μ.

Bevis for Teorem 2: Som det fremgår av redgjørelsene i §5 er det nok å vise formel (7) i §5. Anta derfor for vilkårlig B at (1) BêC;μ & ¬Bev(S;μ, ¬B)). Fra definisjonen av S;μ-konsistent mengde følger da at :

(2) {B} er S;μ-konsistent.

Fra (2) og Lemma 13 har vi da at det finnes en S;μ-maksimalt konsistent mengde ∏(B) slik at :

(3) {B} Inkl ∏(B).

Da har vi at R;(∏(B)), konstruert på den måten som er vit like før Lemma 15, er en modell for L;μ. Ved hjelp av Lemma 15 følger derfor:

(4) R;(∏(B))êM;μ & (AD)(DêC;μ –> (Dê∏(B) <–> R;(∏(B))(C)=1))

Fra (1), (3) og (4) følger da R;(∏(B))(B)=1. Men dette og den første konjunkten i (4) impliserer at (ER)(RêM;μ & R(B)=1). Dette viser at (7) holder og avslutter vårt bevis for Teorem 2. **Q.E.D**.

Vi har dermed nådd til veis ende og vist at kalkylen S;μ er "sunn" og fullstendig.

§ 5.4.1

Teorem 2 er det man vanligvis kaller for et "svakt" fullstendighetsteorem. Vi vil her føye til et bevis for en annen sats som har Teorem 2 som konsekvens og som derfor kunne kalles for et "sterkt" fullstendighetsteorem. Anta Δ Inkl C;μ og at BêC;μ. Vi kaller da en formelsekvens D;1,...,D;n der D;iêC;μ for i=1,...,n for et bevis for B=D;n ut fra Δ hvis og bare hvis vi har for alle formlene i sekvensen at de enten er et aksiom i S;μ, en formel i Δ eller er sluttet fra tidligere formler i sekvensen ved hjelp av modus ponens. Vi skriver "Bev;Δ(S;μ, B)" (og sløyfer uttrykket "S;μ" når det ikke kan oppstå misforståelser) for "B er bevisbar i kalkylen S;μ ut fra Δ" og mener med dette at det finnes et bevis for B i S;μ ut fra Δ.

Anta RêM;μ og at Δ Inkl C;μ. Da sier vi at R er en modell for Δ, i symboler "Mod(R,Δ)", hvis og bare hvis (AB)(BêΔ –> R(B)=1). Man har da selvfølgelig at Mod(R, {B}) hvis og bare hvis R(B)=1.

Den satsen vi nå ønsker å bevise er:

Teorem 3 (Δ Inkl C;μ & AêC;μ) –>
(Bev;Δ(S;μ, A) <–> (AR)(RêM;μ & Mod(R,Δ) –> R(A)=1))

Bevis: (I) Vi tar først for oss gyldighetsdelen. Anta:

(1) Δ Inkl C;μ & AêC;μ & Bev;Δ(S;μ, A)

Anta dessuten for vilkårlig for vilkårlig R at (2) RêM;μ & Mod(R,Δ). Fra den siste komponenten i (1) følger eksistensen av et bevis for A ut fra Δ. Dette innebærer at det finnes en formelsekvens B;1,....,B;n der B;n=A som er et bevis for A i S;μut fra Δ. Vi ønsker nå å bevise at R(A)=1. Dette kan gjøres ved induksjon på n. Er n=1 har vi at B;1 enten er et aksiom i S;μ eller en formel i Δ. I begge tilfelle har vi at R(B;1)=1 i lys av (2), Lemma 9 og Lemma 10. Anta satsen holder for alle k<p der p≤n. Vi skal da vise at den holder for p. Er B;p et aksiom eller en formel i Δ bevises R(B;p)=1 som i basistilfellet. Er B;p sluttet fra B;k og B;s=(B;k–>B;p) der k,s<p har vi etter induksjonshypotesen at R(B;k)=1 og R(B;k–>B;p)=1. Men herav følger R(B;p)=1 (Jmf. definisjonen av modell og valusajonsregelen for –>. Det følger at R(B;p)=1 for alle p≤n og derfor at R(B;n)=R(A)=1.

(II) Vi tar så for oss fullstendighetsdelen i satsen. I beviset for denne del skal vi benytte oss av det følgende teorem som er en variant av deduksjons-teoremet tilpasset kalkylen S;μ.

Teorem 4 Anta Δ Inkl C;μ og at A,BêC;μ. Da har man:
Bev;(ΔU{B})(S;μ, A) <–> Bev;Δ(S;μ, B–>A)

Dette teoremet bevises på vanlig måte når man, som her, begrenser seg til μ-lukkede formler. Beviset kan gjennomføres slik som vist i f.eks. Stoll [1], s 378 – 379, og utelates derfor.

Som et korollar til dette teoremet har man:

Teorem 4.1 Anta {B;1,...,B;n} Inkl Δ og at AêC;μ. Da gjelder:
Bev;({B;1,...,B;n})(S;μ, A) <–> Bev(S;μ, B;1&...&B;n –>A)

Vi kan nå gjennomføre beviset for fullstendighetsdelen i Teorem 3. Anta

(1) Δ Inkl C;μ & AêC;μ.

Anta videre at (2) ¬(Bev;Δ(S;μ,A). Det vil da være tilstrekkelig å vise følgende:

(+) (ER)(RêM;μ & Mod(R,Δ) & R(¬A)=1)

Anta for reduktio ad absurdum at ΔU{¬A} er inkonsistent. Da vil det finnes B;1,...,B;nêΔ slik at Bev(S;μ, ¬(B;1&....&B;n&¬A)). Dette innebærer at Bev(S;μ, B;1&...&B;n –>A). I lys av Teorem 4.1 har man da

Bev;({B;1,...,B;n})(S;μ,A). Dette impliserer Bev;Δ(S;μ, A) (Jmf. definisjonen av dette uttrykket). Men dette strider åpenbart mot (2). Det følger at ΔU{¬A} er S;μ-konsistent. I følge Lemma 13 finnes det da en maksimalt S;μ-konsistent mengde ∏ der (3) ΔU{A} Inkl ∏. I følge Lemma 15 har vi da at R;∏êM;μ er slik at: (4) (AB)(BêC;μ –> (R;∏(B)=1 <–> Bê∏)). Fra dette og (3) følger:

(AB)(BêΔU{A} –> R;∏(B)=1). Men da

R;∏êM;μ & Mod(R;∏,Δ) & R;∏(¬A)=1. Fra dette følger så (+). Dette avslutter beviset for fullstendighetsdelen, og dermed beviset for Teorem 3. **Q.E.D**.

§ 6 En annen kalkyle som er relatert til S;μ, S;μ(Δ)

Anta Δ er en mengde med setningsbokstaver i L;μ, ie. Δ Inkl Var(L;μ). Vi kaller da paret <L;μ,Δ> for et μ-språk med utvalgte setningsbokstaver. Elementene i Δ er da de utvalgte setningsbokstavene. Det μ-språk med utvalgte setningsbokstaver hvor setningsbokstavene er dem i Δ betegner vi med "L;μ(Δ)".

Med en modell for L;μ(Δ) forstår vi nå et element RêM;μ der vi har at R(q)ê{0,1} for alle de setningsbokstavene som er med i Δ. Klassen av alle moddeller i denne forstand betegner vi med "M;μ(Δ)". I denne forbindelse minner vi om hva vi sa i § 2.3 om Q-modeller. Klassen av disse er nøyaktig - som man nå skulle kunne se – M;μ(Q) dersom Q Inkl Var(L;μ).

For språk av typen L;μ(Δ) redefinerer vi nå hva som menes med at en setningsbokstav forekommer μ-fri i en formel A. Dette skjer ved den følgende definisjon:

En setningsbokstav forekommer μ-fri med hensyn på Δ i en formel A hvis og bare hvis den ikke er med i Δ og det er slik at den på visse steder i A
ikke forekommer i noen formel av typen μ(B).

En μ-fri *forekomst* av en setningsbokstav med hensyn på Δ vil følgelig være en forekomst av en setningsbokstav som ikke er med i Δ og hvor forekomsten av setningsbokstaven ikke er i noen formel av typen μ(B). En forekomst av en setningsbokstav som ikke er μ-fri med hensyn på Δ kalles μ-bundet med hensyn på Δ. En formel hvor alle forekomster av setningsbokstaver er μ-bundet med hensyn på Δ kalles μ-lukket med hensyn på Δ. Klassen av alle μ-lukkede formler med hensyn på Δ betegnes med "C;μ(Δ)".

Fra disse definisjonene fremgår det at hvis L;μ(Δ) er et μ-språk med utvalgte setningsbokstaver og pêΔ så vil p være en μ-lukket formel. Er videre p;1,...,p;nêΔ og A en formel som utelukkende er bygget opp fra p;1,...,p;n ved hjelp av ¬, –> og μ vil også A være μ-lukket med hensyn på Δ.

§ 6.1 Kalkylen S;μ(Δ) (der Δ Inkl Var(L;μ))

Språket til kalkylen S;μ(Δ) er et μ-språk med utvalgte setningsbokstaver, L;μ(Δ), der Δ Inkl Var(L;μ). Slutningsregler i kalkylen er bare modus ponens.

Aksiomene i S;μ(Δ) er de følgende:

(i) Er A,B,CêC;μ(Δ) så er følgende formler aksiomer:
A'1 A–>(B–>A)
A'2 (A–>(B–>C))–>((A–>B)–>(A–>C))
A'3 (¬B–>¬A)–> ((¬B–>A) –>B)

(ii) Er AêC;μ(Δ) så er den følgende formel et aksiom:
A'4 A<–>μ(A)

(iii) Er p;1,...,p;n der n>0 nøyaktig de setningsbokstavene som forekommer μ-fri i C med hensyn på Δ så er følgende formel et aksiom:
A'5 Konj/i,1,n/(μ(p;i v¬p;i)) <–> μ(C)vμ(¬C)

(iv) Er A,BêFm(L) så er den følgende formel et aksiom:
A'6 μ(A–>B) <–> [(μ(A)&μ(B)) v (μ(¬A)&μ(B)) v (μ(¬A)&μ(¬B))]

(v) Er AêFm(L;μ) så er følgende formel et aksiom:
A'7 μ(¬A) –> ¬μ(A)

Dette avslutter oversikten over aksiomer.

Dermed er kalkylen S;μ(Δ) definert. Man ser at en formel av typen p<–>μ(p) er et akiom i S;μ(Δ) om pêΔ. En slik formel er imidlertid ikke noe aksiom i S;μ.

I forbindelse med med S;μ(Δ) og språket L;μ kan man bevise hjelpesetninger som er helt analoge med Lemma 1 – Lemma 12. Faktisk holder alle disse hjelpesetningene om man erstatter "M;μ" med "M;μ(Δ)", "C;μ" med "C;μ(Δ)" og i stedet for å snakke om setningsbokstaver som forekommer μ-fri (μ-bundet) taler om setningsbokstaver som forekommer μ-fri med hensyn på Δ (μ-bundet med hensyn på Δ). Vi kan derfor bevise, helt i analogi med Teorem 1:

Teorem 5 (AB)(BêFm(L;μ) –> (Bev(S;μ(Δ),B) –> (AR)(RêM;μ(Δ) –> R(B)=1))

§ 6.2 Fullstendigheten til S;μ(Δ)

Vi bemerker først at hvis Δ Inkl Var(L;μ) så er mengden av alle μ-lukkede formler med hensyn på Δ, dvs. C;μ(Δ), identisk med den minste formelmengden i L;μ som inkluderer Δ, samt mengden av alle formler av typen μ(B), og som dessuten er lukket under konnektivene ¬ og –>. Dette innebærer at hvis man skal vise at alle formler i C;μ(Δ) har en bestemt egenskap E er det nok å vise at alle setningsbokstavene i Δ har egenskapen E, videre at alle formlene av typen μ(B) har egenskapen E, og endelig at dersom to formler A,B begge har egenskapen E så har også formlene ¬A, og A–>B denne egenskapen.

Fullstendighetsbeviset for S;μ(Δ) blir i det store og hele nesten likt med det for S;μ. Det er altså mulig å gi bevis for den følgende sats:

Teorem 6 Anta Δ Inkl Var(L;μ). Da gjelder:
(AB)((BêFm(L;μ) & (AR)(RêM;μ(Δ) –> R(B)=1)) –> Bev(S;μ(Δ),B))

La oss skissere hovedpunktene i beviset.
Man ser lett at de resonnementene vi gjennomførte i § 5 holder om man i denne paragrafen erstatter "C;μ" med "C;μ(Δ)", forutsetter at Δ inkl Var(L;μ), og dessuten erstatter henvisningene til M;μ med tilsvarende hensvvisninger til M;μ(Δ). I stedet for Lemma 4 og Lemma 8 må man bruke tilsvarende hjelpesetninger som gjelder for C;μ(Δ). Disse hjelpesetningene må derfor bevises på nytt. Dette skulle imidlertid ikke by på noen prinsipielle problemer. De definisjonene som gis i §5.2 kan nå overføres til S;μ(Δ). I dette avsnittet behøver vi bare å erstatte "S;μ" overalt med "S;μ(Δ)" og "C;μ" med "C;μ(Δ)". Videre vil bevisene for Lemma 13 og Lemma 14 kunne overtas slik de står med disse små forandringene. I § 5.3 må vi forutsette disse forandringene som nå er nevnt. Definisjonen av R;∏ kan overtas uten forandringer. Også beviset for Lemma 15 kan overtas med de forandringene som vi så langt har nevnt, men i beviset må referansene til Lemma 1 – Lemma 13 erstattes med tilsvarende referanser til satser som gjelder foe C;μ(Δ). Vi må også i Lemma 15 forutsette at Δ Inkl Var(L;μ). I tillegg må vi føye til et nytt trinn i beviset for punkt (a). Det må bevises at dette punkt holder om B=p:k for p;kêΔ. Dette er imidlertid enkelt:

Anta R;∏(p;k)=1. Da har vi i lys av definisjonen av R;∏ at μ(p;kv¬p;k)ê∏ og at μ(p;k)ê∏. Nå har vi imidlertid, i lys av A'4, at Bev(S;μ(Δ), p;k <–> μ(p;k)) siden p;kêΔ. Det følger at P;kê∏ siden ∏ er en maksimalt S;μ(Δ)-konsistent formelmengde. Omvendt har vi ved hjelp av A'4 at hvis

p;kê∏ & μ(p;kv¬p;k)ê∏

følger R;∏(p;k)=1. Imidlertid må man her godtgjøre at μ(p;k) –>μ(p;kv¬p;k) er et teorem i S;μ(Δ). Vi har at at Bev(S;μ(Δ), p;kv¬p;k) om p;kêΔ i lys av de setningslogiske aksiomene A'1–A'3 i S;μ(Δ). Ved hjelp av A'4 har vi:

Bev(;μ(Δ), (p;kv¬p;k) –> μ(p;kv¬p;k)). Det følger da ved hjelp av modus ponens at Bev(S;μ(Δ), μ(p;kv¬p;k)). I lys av Lemma 14 har vi da: μ(p;kv¬p;k)ê∏. Det bør bemerkes at dette også viser at R;∏ oppfyller det krav som stilles til en modell i klassen M;μ(Δ), nemlig at R;∏(p)ê{0.1} om pêΔ, dvs. om p er en utvalgt setningsbokstav. Dette avslutter det vi har å si om beviset for Teorem 6.

En sterk versjon av fullstendighetsteoremet for S;μ(Δ) kan formuleres og bevises i likhet med det for S;μ. Vi overlater her detaljene til leseren.

§6.3 Kalkylen S+;μ(Δ).

Språket til kalkylen S+;μ(Δ) er L;μ(Δ) der Δ Inkl Var(L;μ). Aksiomene i S+:μ(Δ) er alle aksiomene i S;μ(Δ) pluss alle formler av typen:

A'8 ¬μ(p) & ¬μ(¬p) der pê(Var(L;μ)–Δ)

Slutningsreglene i S+;μ(Δ) består av bare en regel, nemlig modus ponens.

Med en S+;μ(Δ)-modell for L;μ forstår vi en modell RêM;μ hvor man har R(p)ê{0,1} om pêΔ og hvor R(p)=* om pê(Var(L;μ)–Δ). Klassen av alle S+;μ(Δ)-modeller for L;μ(Δ) betegner vi med M+;μ(Δ). Det bør bemerkes at det vi tidligere kalte en Q+-modell er det samme som et element i M+;μ(Q). En formel A i L;μ(Δ) kalles S+;μ(Δ)-gyldig hvis og bare hvis den er sann i alle S+;μ(Δ)-modeller, dvs. hvis og bare hvis man har: (AR)(RêM+;μ(Δ) –> R(A)=1). Det er lett – og det gjøres hovedsakelig på akkurat samme måte som ved systemet S;μ(Δ) – å vise at alle teoremer i S+;μ(Δ) er S+;μ(Δ)-gyldige. Vi har derfor:

Teorem 7 Anta Δ Inkl Var(L;μ). Da gjelder:
(AB)(BêFm(L;μ) & Bev(S+;μ(Δ),B) –> (AR)(RêM+;μ(Δ) –> R(A)=1)

Fullstendighetsbeviset gjennomføres på nøyaktig samme måte som ved S;μ(Δ), vi må bare vise at modellen R;∏ som vi konstruerer underveis i dette beviset oppfyller kravet R;∏(p)=* om pê(Var(L)–Δ). Dette må imidlertid være tilfelle siden A'8 inngår blandt aksiomskjemaene i S+;μ(Δ). Vi formulerer fullstendighetsresultatet slik:

Teorem 7.1 Anta Δ Inkl Var(L;μ). Da gjelder:
(AB)([BêFm(L;μ) & (AR)(RêM+;μ(Δ) –> R(A)=1)] –> Bev(S+;μ(Δ), B))

§ 7

Vi vil avrunde vårt studium av kalkylene S;μ, S;μ(Δ) og S+;μ(Δ) ved å vise en del teoremer som viser deres sammenheng med den vanlige klassiske setningslogikk.

§ 7.1

Anta Δ Inkl Var(L;μ). La L(Δ) være språket hvis vokabular består utelukkende av setningsbokstavene i Δ og hvor formlene er bygget opp fra disse setnings-bokstavene bare ved hjelp av ¬ og –> etter de vanlige reglene.

La PC(L(Δ)) være detaksiomatiske system hvis eneste slutningsregel er modus ponens og hvor aksiomene er alle instanser av A1 – A3 når man forutsetter at A,B,CêFm(L(Δ)). Med en modell for L(Δ) forstår vi en funksjon V: Var(L(Δ)) –>{0,1}. Denne utstrekkes til hele L(Δ) på klassisk vis ved å stipulere at V(¬A)=1 hvis og bare hvis V(A)=0 og V(A–>B)=0 hvis og bare hvis V(A)=1 og V(B)=0, i det det forutsettes at V(A)ê{0,1} for alle AêFm(L(Δ)).

Med disse forhold for øye kan det første teoremet formuleres slik:

Teorem 8 Anta Δ Inkl Var(L;μ). Da gjelder:
(a) (AB)(BêFm(L(Δ)) –> (Bev(S;μ(Δ), B) <–> Bev(PC(L(Δ)), B)))
(b) (AB)(BêFm(L(Δ)) –> (Bev(S+;μ(Δ), B) <–> Bev(PC(L(Δ)), B)))

Dette teoremet har en viss interesse siden det viser at kalkylene S;μ(Δ) og S+;μ(Δ) kan oppfattes som konservative utvidelser av kalkylen PC(L(Δ)).

Bevis: Er X en eller annen klasse av modeller for L;μ og A en formel i L;μ betyr "Val(X,A)" at formelen A er sann i alle de modellene som inngår i X. Vi bruker videre uttrykket "Val;Δ(pc, B)" som forkortelse for "Formelen B kommer ut som sann for alle vanlige klassiske tilordninger av sannhetsverdiene 0 og 1 til setningbokstavene i Δ".

I lys av fullstendighetsteoremet for S;μ(Δ) og PC vil det være nok å bevise:
(1) (AB)(BêFm(L(Δ)) –> (Val(M;μ(Δ), B) <–> Val;Δ(PC, B)))
La V være en vilkårlig modell for L(Δ) og anta B er en vilkårlig formel i L(Δ). Utvid V til en modell R der RêM;μ ved å la R(q)=* for alle qê(Var(L;μ)–Δ). Anta Val(M;μ(Δ), B). Da har vi R(B)=1. Ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av formler i L(Δ) viser man nå at V(C)= R(C) om CêFm(L(Δ)). Det følger da at V(B)=R(B)=1. Siden V var en vilkårlig klassisk verditilordning for setningsbokstavene i Δ følger det at Val;Δ(PC, B). Dette viser at den ene halvdelen av (1) holder.

Anta på den annen side at Val;Δ(PC, B) for BêFm(L(Δ)). La R være en model i M;μ(Δ). Da har vi at restriksjonen av R til Δ – la oss betegne denne med "R|Δ". Da har vi at R|Δ er en modell for L(Δ). Ved induksjon beviser man lett:
(AC)(CêFm(L(Δ) –> R(C)= R|Δ(C)).
Fra dette og det at Val;Δ(PC,B) følger at R|Δ(B)= R(B)=1. Men R var en vilkårlig modell i M:μ(Δ). Det følger derfor at Val(M;μ(Δ), B). Dette avslutter beviset for (a). Beviset for punkt (b) i teoremet føres i det vesentlige på den samme måten og overlates til leseren.
Q.E.D.

§ 7.2

La L*;μ være det språket vi får fra L;μ når vi begrenser mengden av setningsbokstaver til dem i Var(L;μ)–Δ. (Vi forutsetter da selvfølgelig at
Δ Inkl Var(L;μ)). La S*;μ være kalkylen S;μ med språket begrenset til L*;μ. Da har man:

Teorem 9 (AC)(CêFm(L*;μ) –> (Bev(S;μ(Δ), C) <–> Bev(S*;μ, C)))

Bevis: I lys av fullstendighetsteoremene for henholdsvis S*;μ og S;μ(Δ) vil det være nok å bevise:

(1) (AC)(CêFm(L*;μ) –> (Val(M;μ(Δ),C) <–> Val(M*;μ,C))).

Her er M*;μ klassen av alle de modeller for L;μ hvor vi har begrenset setningsbokstavene til dem i Var(L;μ)–Δ. Anta for vilkårlig B at (2) BêFm(L*;μ) og at (3) Val(M;μ(Δ),B). La R være en vilkårlig modell i M*;μ. Vi utvider denne til en modell R' for L;μ ved å sette R'(p)=R(p) om pê(Var(L;μ)–Δ) og R'(p)=1 om pêΔ. Ved indukjon på lengden av formler i L*;μ beviser man lett:

(4) (AC)(CêFm(L*;μ) –> R'(C)=R(C))

Siden R'êM;μ(Δ) følger fra (3) at R'(B)=1. Men fra dette, (2) og (4) følger R(B)=1. Siden R var vilkårlig har vi at Val(M*;μ,B) som er det vi ønsker. Dette viser at den ene halvdelen av teoremet holder.

Anta på den annen side at (5) Val(M*;μ, B) for vilkårlig B der BêFm(L*;μ). La R være en vilkårlig modell i M;μ(Δ). Da lar vi R' være retriksjonen av R til Var(L;μ)–Δ og har følgelig at R'êM*;μ. Man beviser lett ved induksjon:

(6) (AC)(CêFm(L*;μ) –> R'(C) = R(C))

Siden R'êM*;μ følger i lys av (5) at R'(B)=1. Dette og (6) gir R(B)=1 siden BêFm(L*;μ). Men siden R var vilkårlig element M;μ(Δ) følger da Val(M;μ(Δ),B). Dette viser at også den andre halvdelen av teoremet holder. **Q.E.D**.

Også dette teoremet har en viss interesse siden det viser at kalkylen S;μ(Δ) kan oppfattes som en konservativ utvidelse av S*;μ.

§7.3

Vi vil tilslutt vise en sats som sier at den vanlige setningslogikken kan intepreteres troverdig inn i kalkylen S;μ. La L;pc være språket L;μ bortsett fra at vi har fjernet operatoren μ. Mao. er formlene i L;pc dem som er bygget opp fra setningsbokstavene i L;μ ved hjelp av bare ¬ og –>. Vi lar PC betegne den kalkylen som har L;pc som sitt språk og hvor aksiomene er alle instanser av A1 –A3 begrenset til dette språket, ie hvor A,B,CêFm(L;pc). Den eneste slutningsregelen er modus ponens. Gitt disse definisjonene kan teoremet formuleres slik:

Teorem 10 Anta A er en vilkårlig formel i L;pc og at c;1,...,c;n er de setningsbokstavene som forekommer i A. Da gjelder:

Bev(PC, A) <–> Bev(S;μ, (Konj/i,1,n/(μ(c;iv¬c;i)) –> μ(A)))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. I lys av fullstendighetsteoremene for PC og S;μ vil det være tilstrekkelig å bevise:

(1) Val;PC(A) <–> Val(M;μ, (Konj/i,1,n/(μ(c;iv¬c;i)) –> μ(A)))

(a) Kondisjonalen mot høyre: Anta (2) Val;PC(A). La R være et vilkårlig element i M;μ. mao. anta (3) RêM;μ.

Tilfelle (i): R(c;k)=* for noe kê{1,...,n}. I så fall har vi R(μ(c;kv¬c;k))=0 og derfor at R(Konj/i,1,n/(μ(c;iv¬c;i)))=0. Da R(B)=1 hvor

B= (Konj/i,1,n/(μ(c;iv¬c;i)) –> μ(A)) (B blir sann fordi antesedenten er usann)

Tilfelle (ii): Anta R(c;k)ê{0,1} for alle kê{1,...,n}. da har vi:

(3.1) R(Konj/i,1,n/(μ(c;iv¬c;i)))=1. Definer en klassisk PC-modell V ved å sette V(c;k)=R(c;k) for k=1,...,n. Ved et enkelt induksjonsbevis bevises da:

(4) (AC)(CêFm(L*;pc) –> V(C)=R(C))

hvor språket L*;pc er språket L;pc med setningsbokstavene begrenset til dem i mengden {c;1,...,c;n}. Siden AêFm(L*;pc) følger i lys av (2) at V(A)=1. Dette (3.1) og (4) impliserer R(B)=1 hvor B= (Konj/i,1,n/(μ(c;iv¬c;i)) –> μ(A)).

I begge tilfelle har vi vist at R(Konj/i,1,n/(μ(c;iv¬c;i)) –> μ(A))=1 om R var en vilkårlig modell i M;μ. Dette viser at høyre side i (1) holder.

(b) Kondisjonalen mot venstre: Anta at

(5) Val(M;μ, (Konj/i,1,n/(μ(c;iv¬c;i)) –> μ(A))). La V være en vilkårlig PC-valusjon, dvs. tilordning av sannhetsverdiene {0,1} til setningsbokstavene i L;μ. Definer RêM;μ ved å sette R(c;i)=V(c;i) om i=1,...,n og R(q)=1 om qê(Var(L;μ)–{c;1,...,c;n}). Siden R(c;i)=V(c;i)ê{0,1} har vi (6) R(μ(c;iv¬c;i))=1 for i=1,...,n. Fra dette, (5) og det forhold at RêM;μ følger:

(7) R(Konj/i,1,n/(μ(c;iv¬c;i)) –> μ(A))=1.

Fra (6) og (7) følger: R(μ(A))=1. Herav (8) R(A)=1. Nå har man at (9) R(C)=V(C) for alle de formler C som bare er bygget opp ved hjelp av c;1,...c;n og operatorene ¬ og –>. Dette bevises ved et enkelt induksjonsbevis. Det følger, siden A er en slik formel, at V(A)=1 i lys av (8) og (9). Men V var vilkårlig. Derfor Val;PC(A).

Dette avslutter beviset for Teorem 10. **Q.E.D.**

Med dette setter vi sluttstreken for våre undersøkelser i forbindelse med kalkylen S;μ.

*****

Referanser

Referanser

Segerberg [1], Segerberg, Krister, "A contribution to non-sense-logics", Theoria, 31, 1965, pp 199–217.
Segerberg [2], Segerberg, Krister, "Some Modals Logics based on a Three-valued Logic", Theoria, 33, 1965, pp 53 –71.
Halldén [2], Halldén, Søren, *The logic of nonsense*, Uppsala, 1949
Stoll [1], Stoll, Robert, *Set theory and Logic*, W. H. Freeman and Company, San Francisco & London, 1961

***